



Российские САЕ-системы на службе промышленности²⁰²⁰

Нелинейные расчеты с учетом трения при контактом взаимодействии

Сергей Майоров

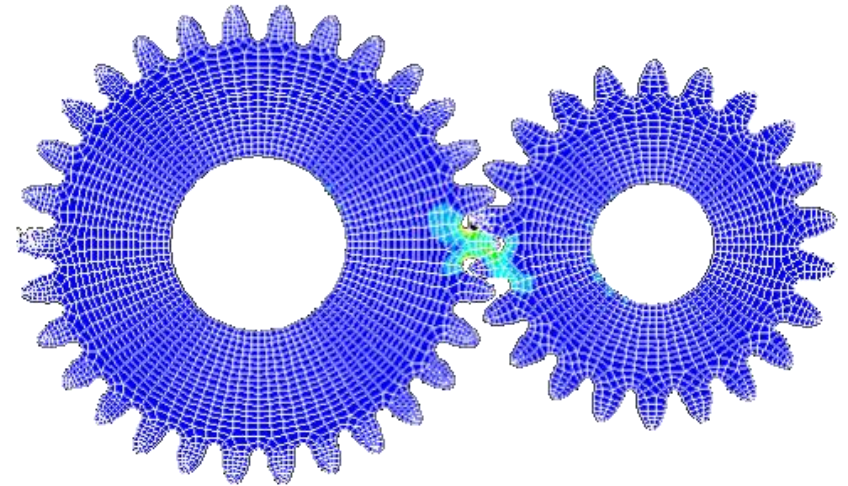
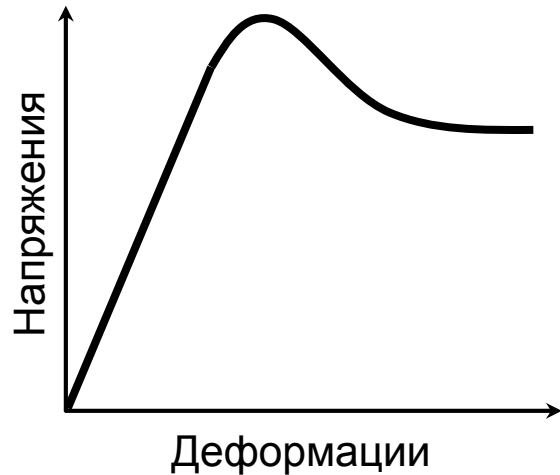


НТЦ «АПМ» - ведущий разработчик ПО для инженерных расчетов



Зачем нужен нелинейный анализ???

- Необходимость в нелинейном анализе возникает, если в процессе нагружения конструкции происходит **значительное** изменение ее **жесткости**. Вот три **причины значительного** изменения **жесткости**:
 - Деформации превышают предел - **физическая нелинейность** (пластичность, гиперупругость и т.п.)
 - Перемещения велики (например нагруженный спиннинг) – **геометрическая нелинейность**
 - Возникновение **контакта** между телами или элементами конструкции

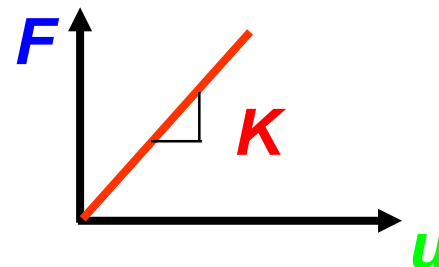




Что такое нелинейная задача?

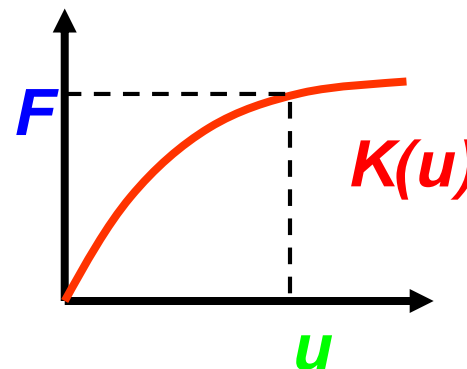
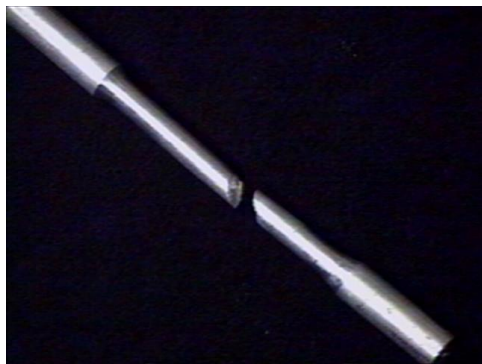
Закон Гука: $F = Ku$ где F - сила, u - перемещение, K – постоянная жесткость.

Зная силу и жесткость, найдем перемещения $u = F/K$.



Вспомним лабораторную работу из курса сопротивления материалов:

$K(u)$ – переменная жесткость => задача нелинейная. Как найти u , зная F и $K(u)$?





Как бороться с нелинейными задачами?

- Итерационный метод Ньютона на основе следующего линейного уравнения:

$$[K^T]\{\Delta u\} = \{F\} - \{F^{nr}\}$$

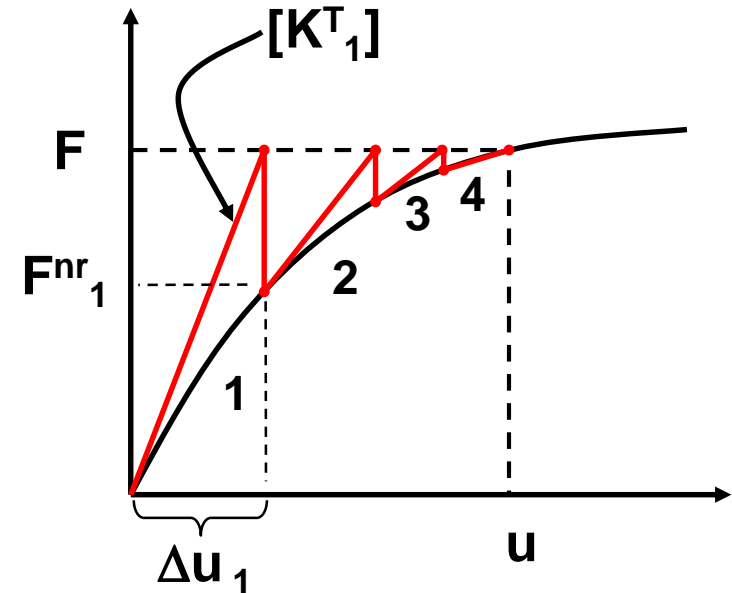
$[K^T]$ = касательная матрица жесткости

$\{\Delta u\}$ = приращения вектора перемещения

$\{F\}$ = вектор приложенных сил

$\{F^{nr}\}$ = вектор внутренних сил

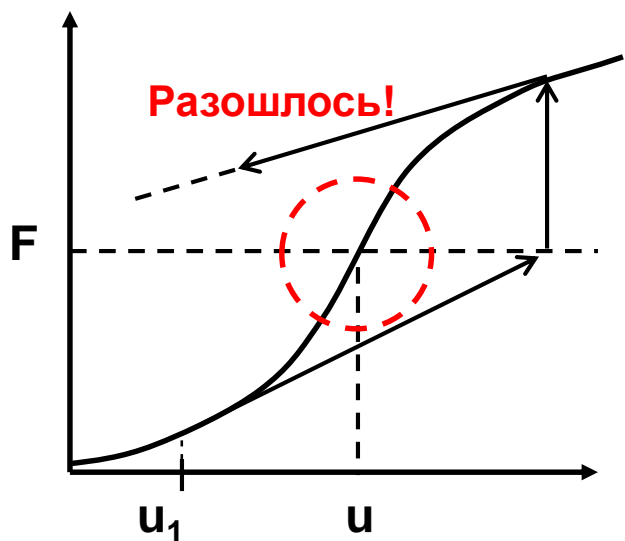
- Каждая итерация нужна для определения $\{\Delta u\}$.
 - Итерация по «стоимости» вычислений как минимум соответствует задаче линейной статики.
- Общее решение накапливается на каждой i -ой итерации:
$$\{u_{i+1}\} = \{u_i\} + \{\Delta u\}$$



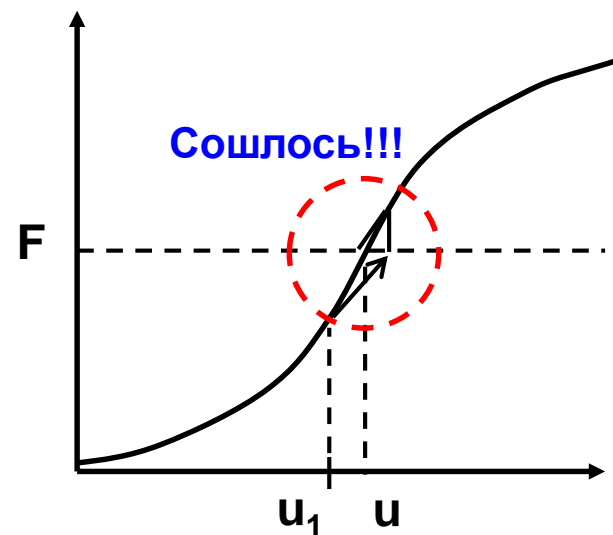


Ямы на пути

- Однако метод Ньютона не гарантирует, что в итерационный процесс сойдется!
- Итерационная процедура метода Ньютона будет сходиться только в случае, если начальное приближение $\{u_1\}$ будет находиться в **радиусе сходимости**.



Начальное приближение
не находится в **радиусе
сходимости**



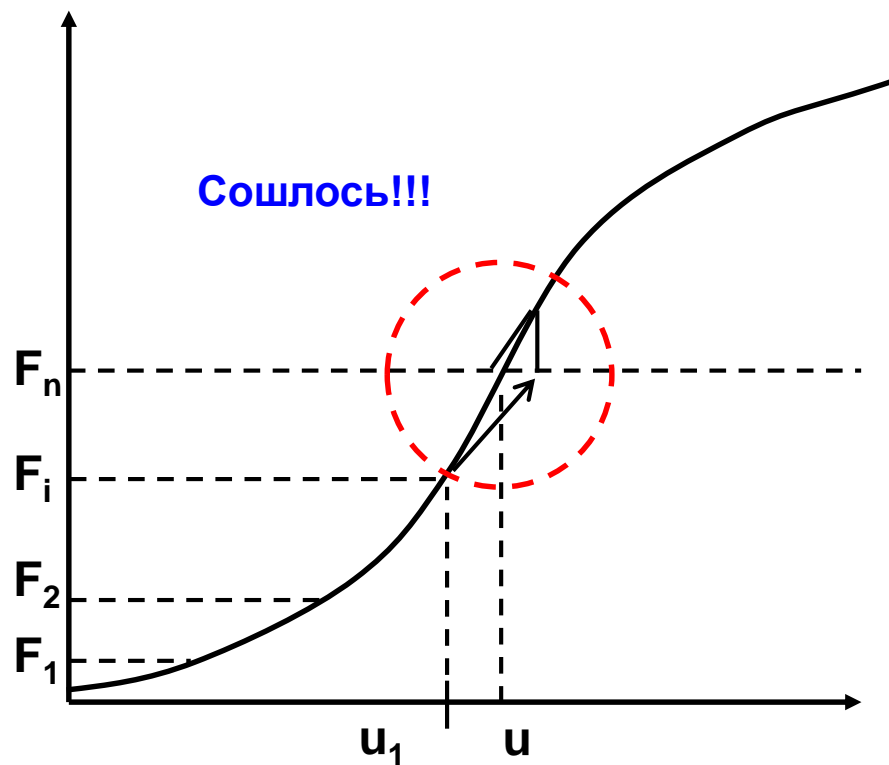
Начальное приближение
находится в **радиусе
сходимости**



Ямы на пути

ВОПРОС: Как попасть в *радиус сходимости*?

ОТВЕТ: Разбить нагрузку на n частей (необязательно равных) и прикладывать нагрузку порциями – *(под)шагами*





Ямы на пути

- К сожалению вид зависимости между перемещениями и силами практически никогда не известен поэтому нельзя определить радиус сходимости...

ВОПРОС: ЧТО ДЕЛАТЬ?

ОТВЕТ: ИССЛЕДОВАТЬ ПРОЦЕСС СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ И РАЗБИВАТЬ НАГРУЗКУ ОПЫТНЫМ ПУТЕМ.

ВОПРОС: ...И ЧТО НИЧЕГО НЕЛЬЗЯ СДЕЛАТЬ?

ОТВЕТ: КОНЕЧНО МОЖНО. МЫ РАЗВИВАЕМ И ВСТРАИВАЕМ МЕТОДЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОДБОРА ШАГА ПО НАГРУЗКЕ.

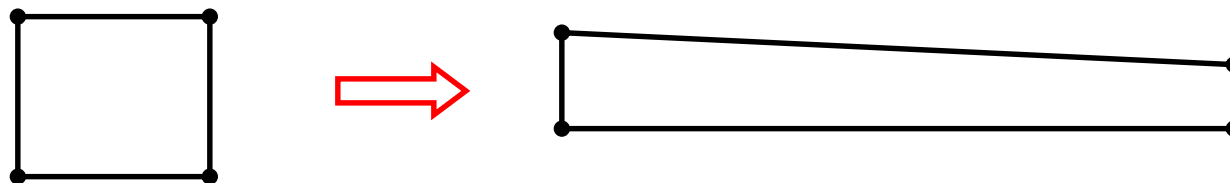
ОДНАКО, ВЫ ДОЛЖНЫ ПОНИМАТЬ СУТЬ ПРОБЛЕМЫ НАЛИЧИЯ РАСХОДЯЩЕГОСЯ РЕШЕНИЯ И БЫТЬ ГОТОВЫМ К ТОМУ, ЧТО РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ НЕ ВСЕГДА МОЖЕТ БЫТЬ НАЙДЕНО!!!



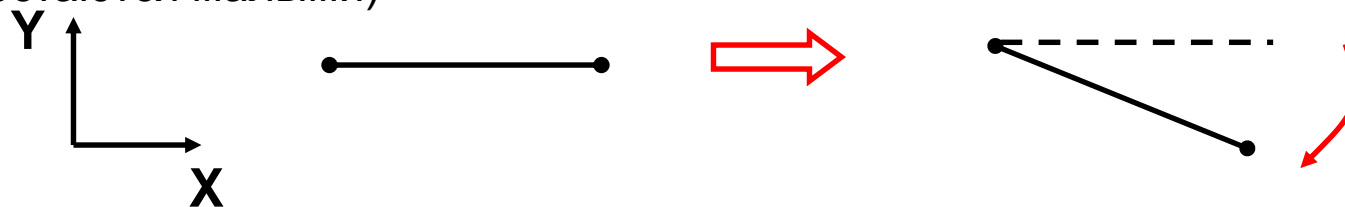
Геометрическая нелинейность

Явления связанные с геометрической нелинейностью:

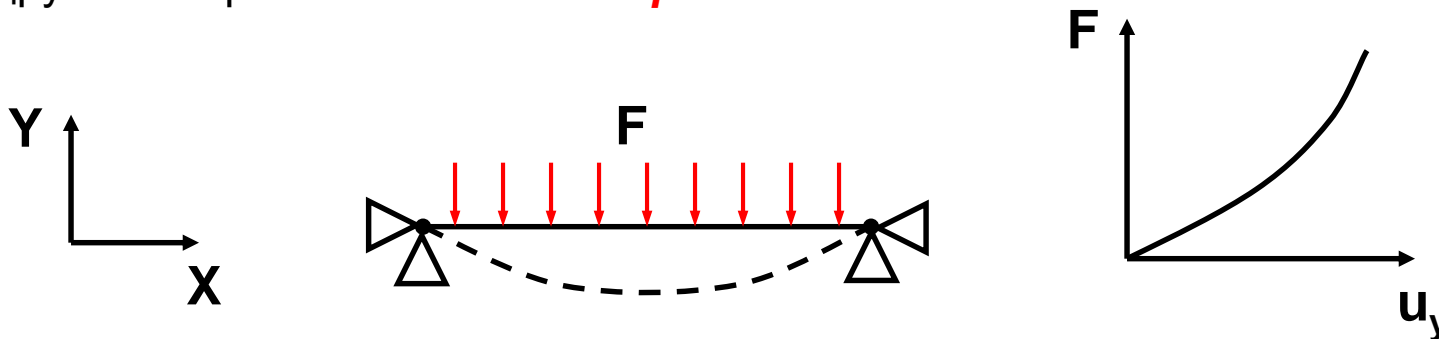
1. Большие изменения геометрических размеров (площадей, толщин, объемов) – **большие деформации**



2. Значимое изменение ориентации (поворот) элементов конструкции – **большой поворот** жесткого целого (деформации остаются малыми)



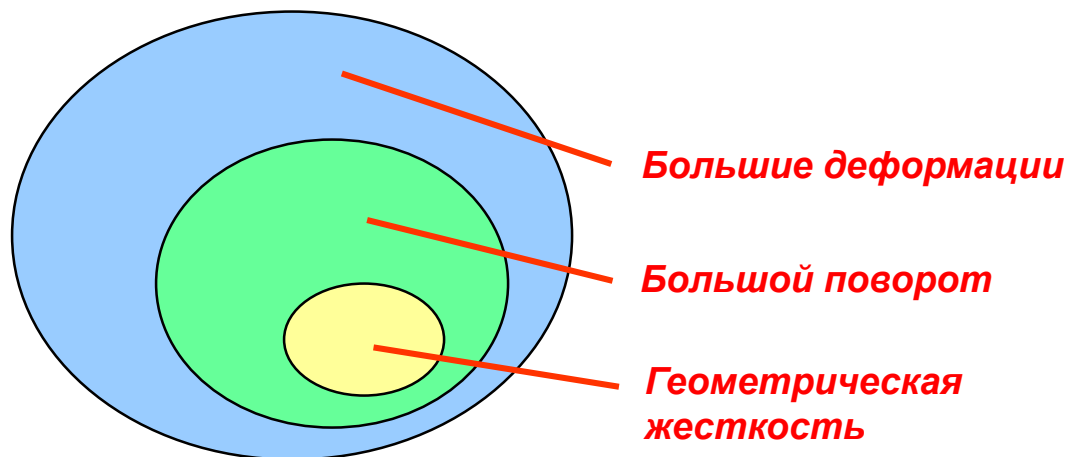
3. Деформации в одном направлении и вызываемые ими напряжения приводят к значительному увеличению жесткости в другом направлении – **геометрическая жесткость**

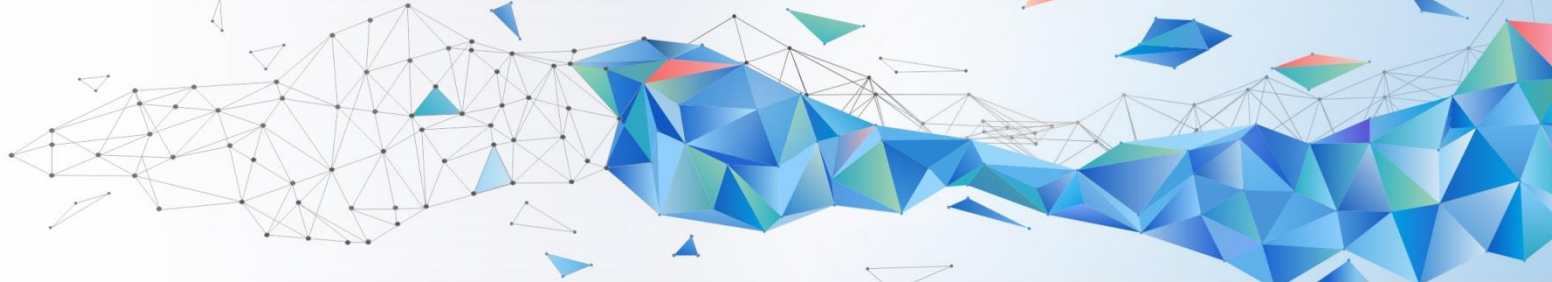




Геометрическая нелинейность

- **Большие деформации** учитывают особенности всех трех явлений
- **Большой поворот** учитывает особенности двух последних явлений
- **Геометрическая жесткость** учитывает особенности последнего явления





Структурный анализ

Объекты

- Расчетная модель
 - Материалы
 - Нагрузки
 - Системы координат
 - Таблицы
 - Функции
 - Анализ
 - FGA
 - Структурный анализ**
 - Результаты

Свойства

Свойство	Значение
Параметры расчета	
Число шагов	50
Большие перемещения	Да
Загружение	Загружение 0
Количество итераций	40
Тип решателя	Direct Intel LDL
Значение сходимости по перем...	0.001
Значение сходимости по силам	0.001
Сохранение результатов	
Частота сохранения результатов	Последний шаг
Число шагов для записи результ...	1

Большие деформации

VS

Геометрическая нелинейность

Нелинейный расчет.
Геометрическая нелинейность

Расчет

- ☐ Линейный статический расчет
- ☐ Расчет устойчивости
- ☐ Собственные частоты
- ☒ Нелинейный расчет

Геометрическая нелинейность

для загрузки: Загружение 0

☐ Натяжение каната соответствует

Расчет для загрузки: Загружение 0

☐ Вынужденные колебания

☐ Гармонические колебания

☐ Усталостный расчет для случайных нагрузжений

☐ Расчет стационарной теплопроводности

☐ Расчет нестационарной теплопроводности

Общие настройки

Геометрическая нелинейность

Большой поворот

Свойство

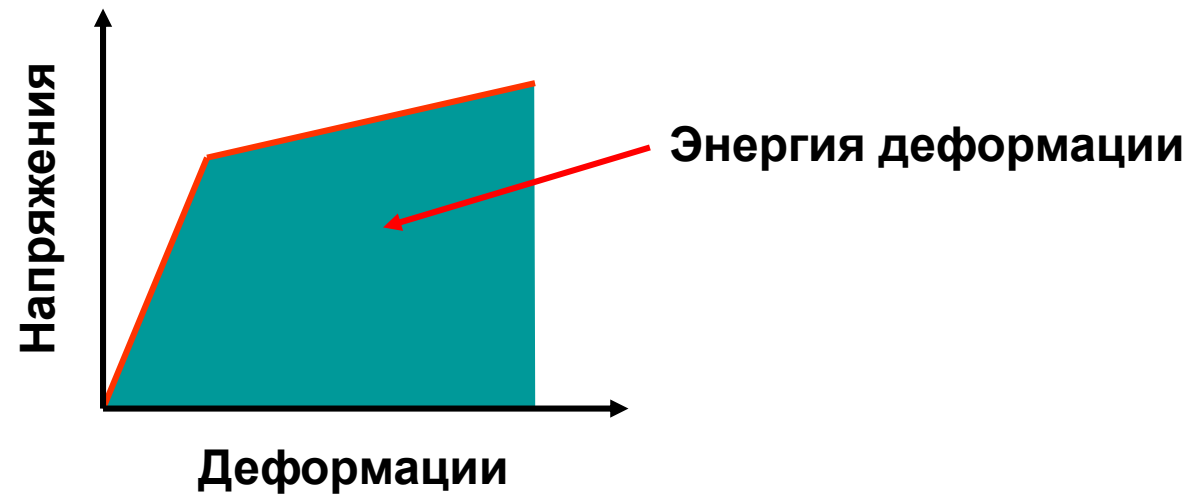
Свойство	Значение
СЛАУ	
Алгоритм решения СЛАУ	Sparse_LDL
Объем оперативной па...	1024
Хранение разложения ...	AutoDecide
Точность решения	1e-10
Максимальное кол-во и...	100000
Вычислять энергию дефор...	<input type="checkbox"/>
Добавлять геометрическу...	<input checked="" type="checkbox"/>
Шагов по нагрузке	10
Максимальное кол-во ите...	30
Точность решения	0.0001
Следящая нагрузка	<input type="checkbox"/>

Геометрическая жесткость



Немного о деформациях и напряжениях

- В геометрически нелинейном анализе используют различные **меры** деформаций и напряжений. Причем эти меры попарно должны быть **сопряжены**
- **Сопряженность** означает, что энергия деформации для любой пары должна быть одинакова при для рассматриваемого НДС.





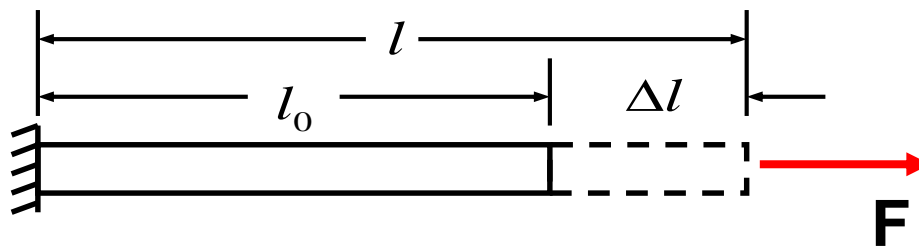
Немного о деформациях и напряжениях

Логарифмические деформации (деформации Генки)

$$\varepsilon_l = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \left(\frac{l}{l_0} \right)$$

Действительные напряжения (напряжения Коши) сопряжены с логарифмическими деформациями

$$\tau = \frac{F}{A}$$





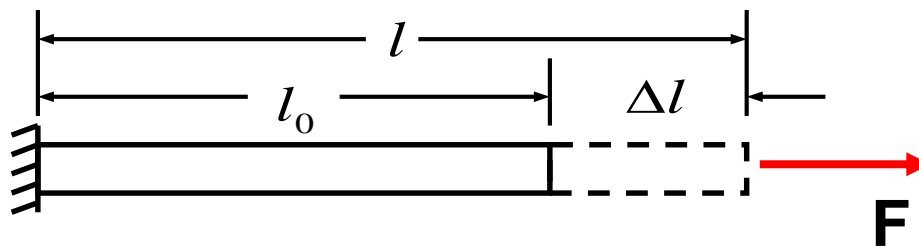
Немного о деформациях и напряжениях

Инженерные деформации

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Инженерные напряжения сопряжены с инженерными деформациями

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$





Физическая нелинейность

Пластичность

Ползучесть

Гиперупругость

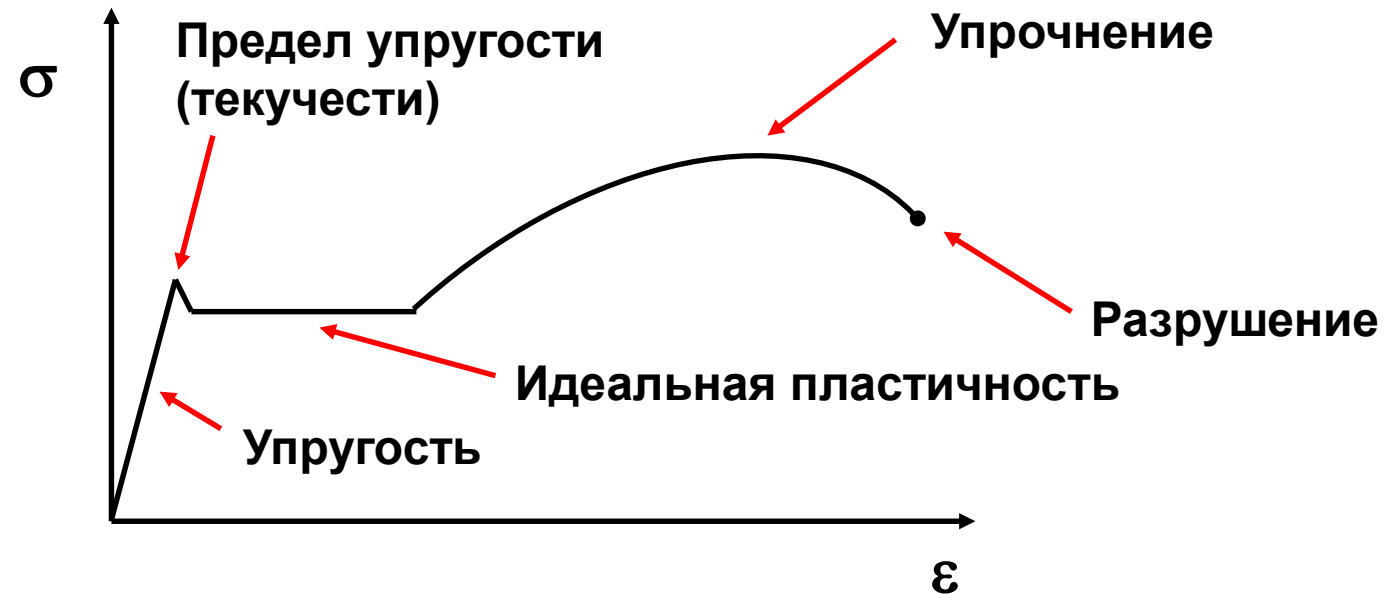
Вязкоупругость

.....



Физическая нелинейность. Пластичность

- Пластичность свойство материала деформироваться постоянно после приложения постоянной нагрузки





Физическая нелинейность. Пластичность

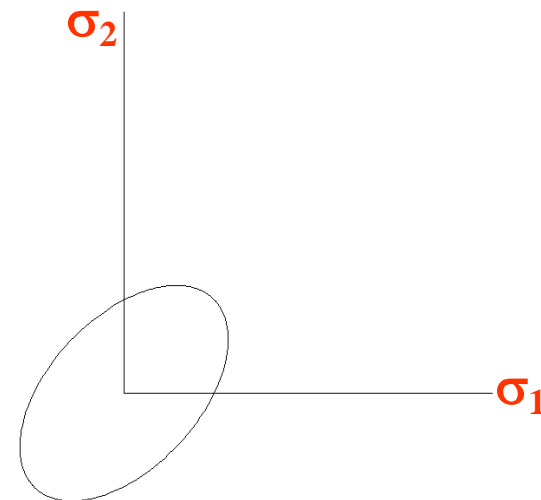
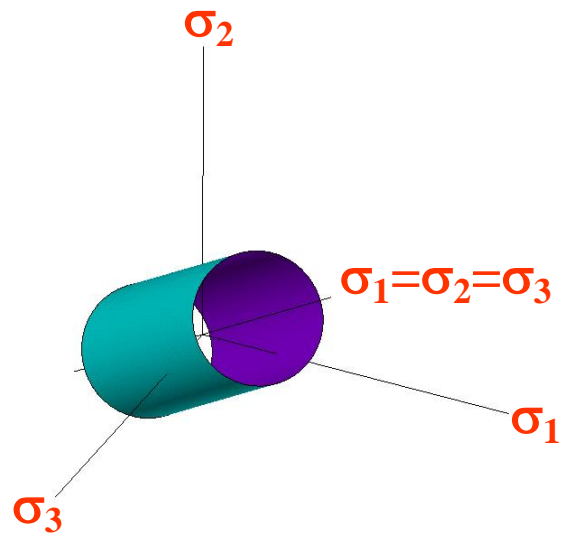
- Инкрементальная теория пластичности (теория течения) устанавливает соотношения между приращениями деформаций и напряжений ($\Delta\sigma$ and $\Delta\varepsilon$ в общем случае используются *меры логарифмических деформаций и напряжений Коши*) в пластическом состоянии материала.
- В основе теории течения лежат три понятия:
 - *Поверхность текучести*
 - *Закон течения*
 - *Закон упрочнения*



Физическая нелинейность. Пластичность. Поверхность текучести

Наиболее распространенный критерий для определения
поверхности текучести – **критерий Мизеса**

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$





Физическая нелинейность. Пластичность. Закон течения

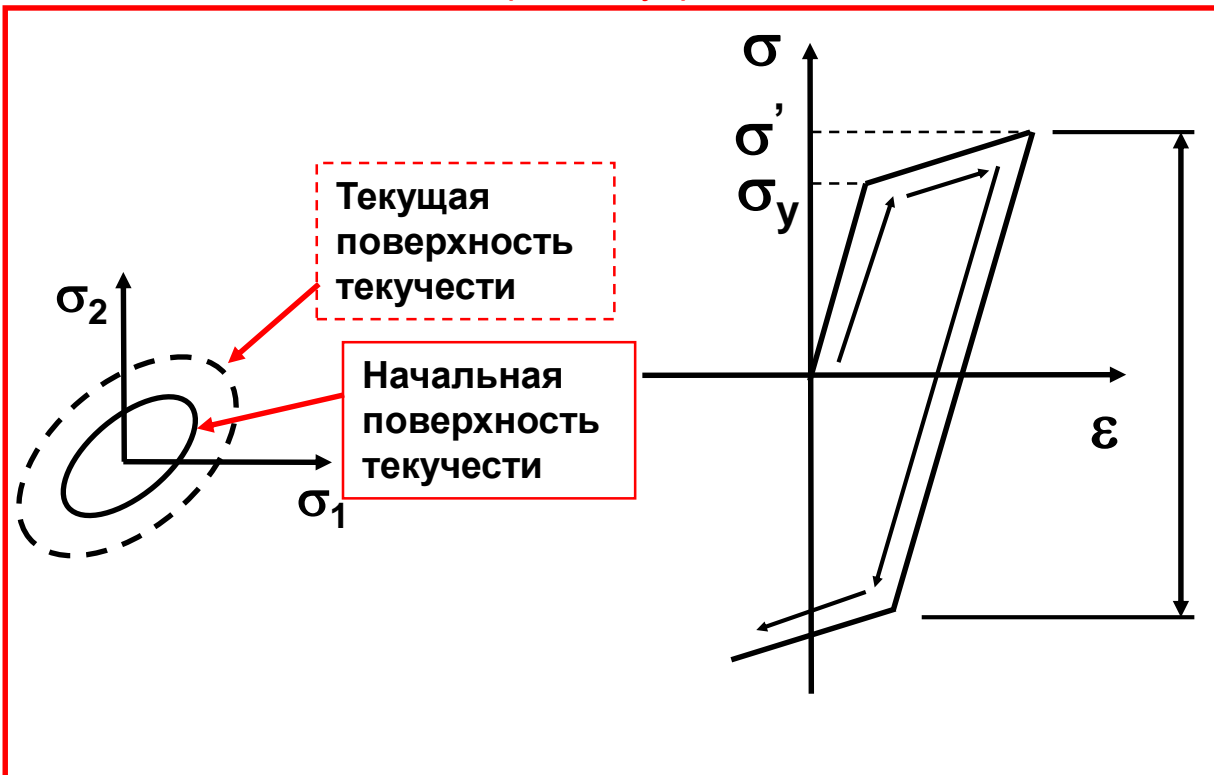
- Закон течения определяет направление пластических деформаций когда напряжения достигли уровня поверхности текучести
- Обычно уравнения течения, получаются на основе критерия определяющего поверхность текучести, и указывают на то, что пластические деформации развиваются в направлении нормали к поверхности текучести.
 - Такой закон течения называется **ассоциативным**. В противном случае **неассоциативным**.



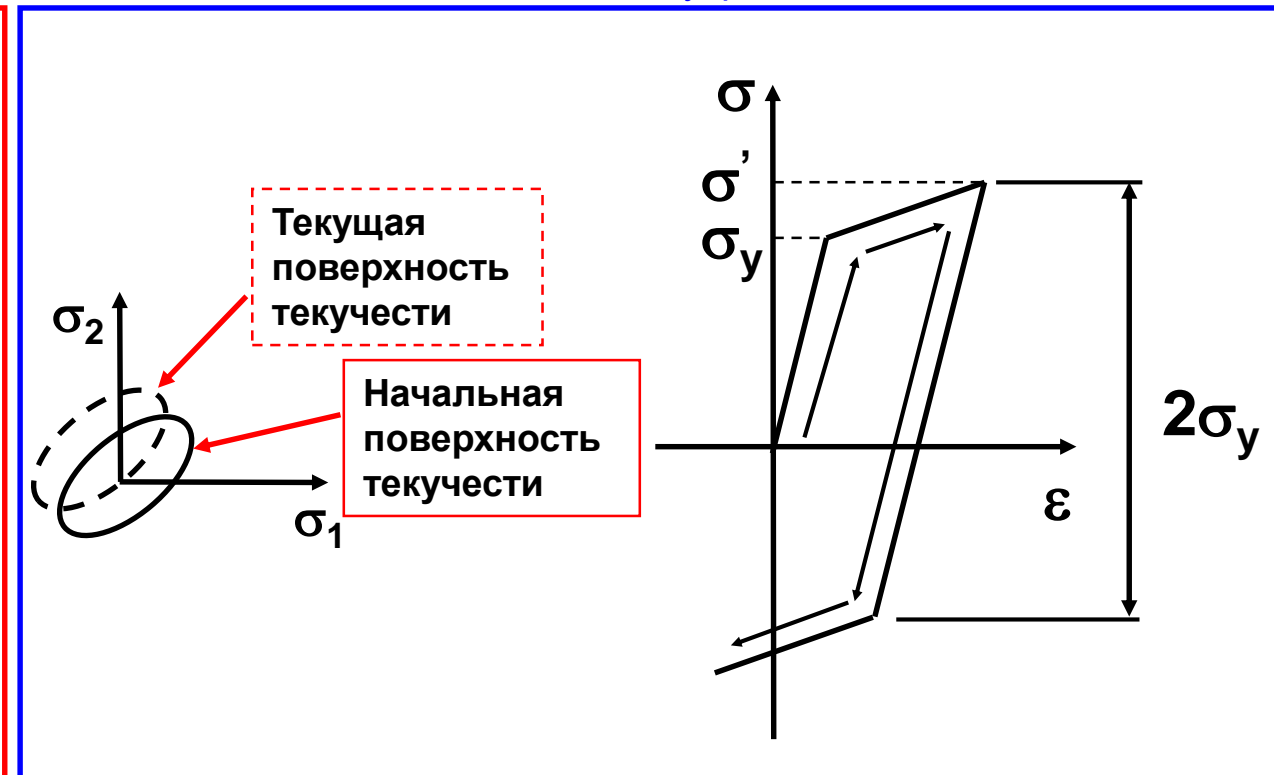
Физическая нелинейность. Пластичность. Закон упрочнения

- Закон упрочнения описывает как изменяется начальное положение поверхности текучести в процессе пластического деформирования

Изотропное упрочнение



Кинематическое упрочнение



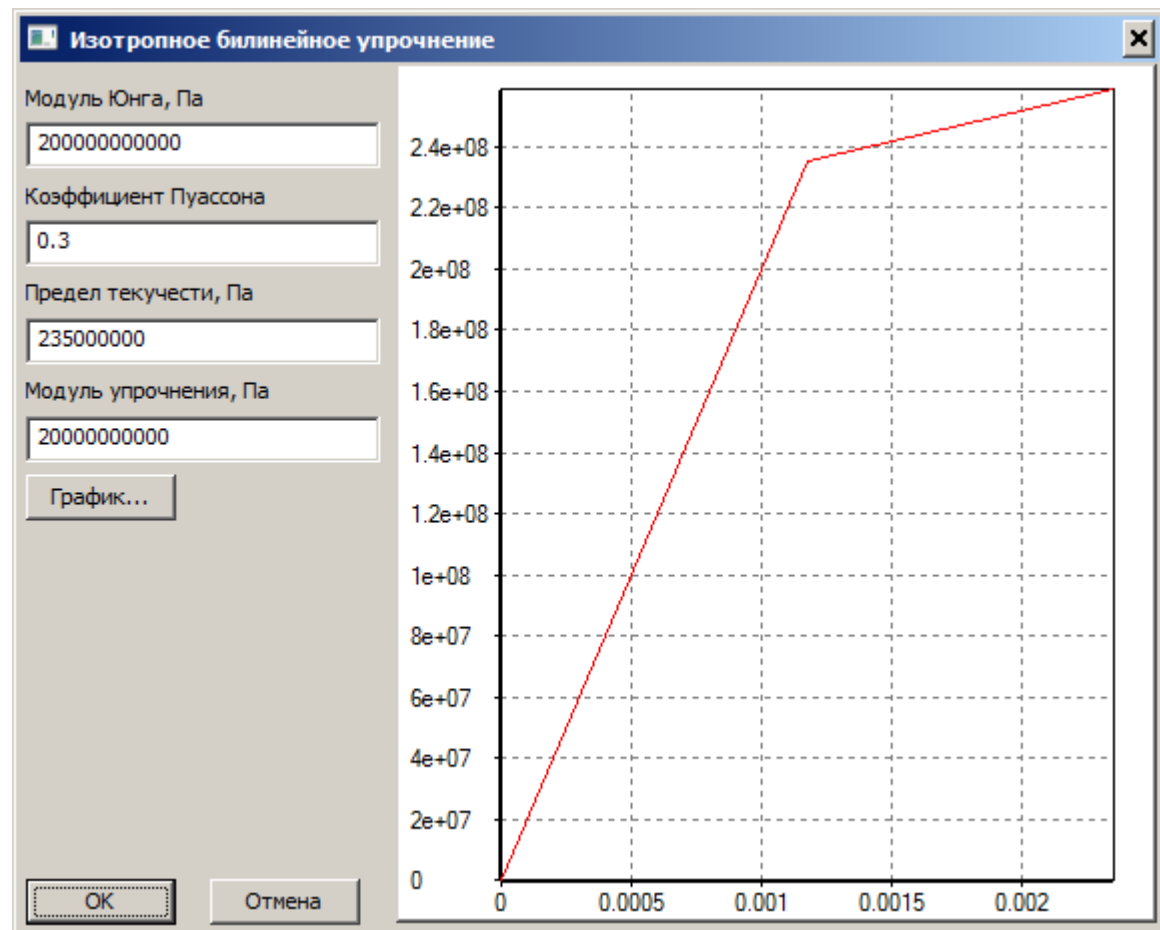
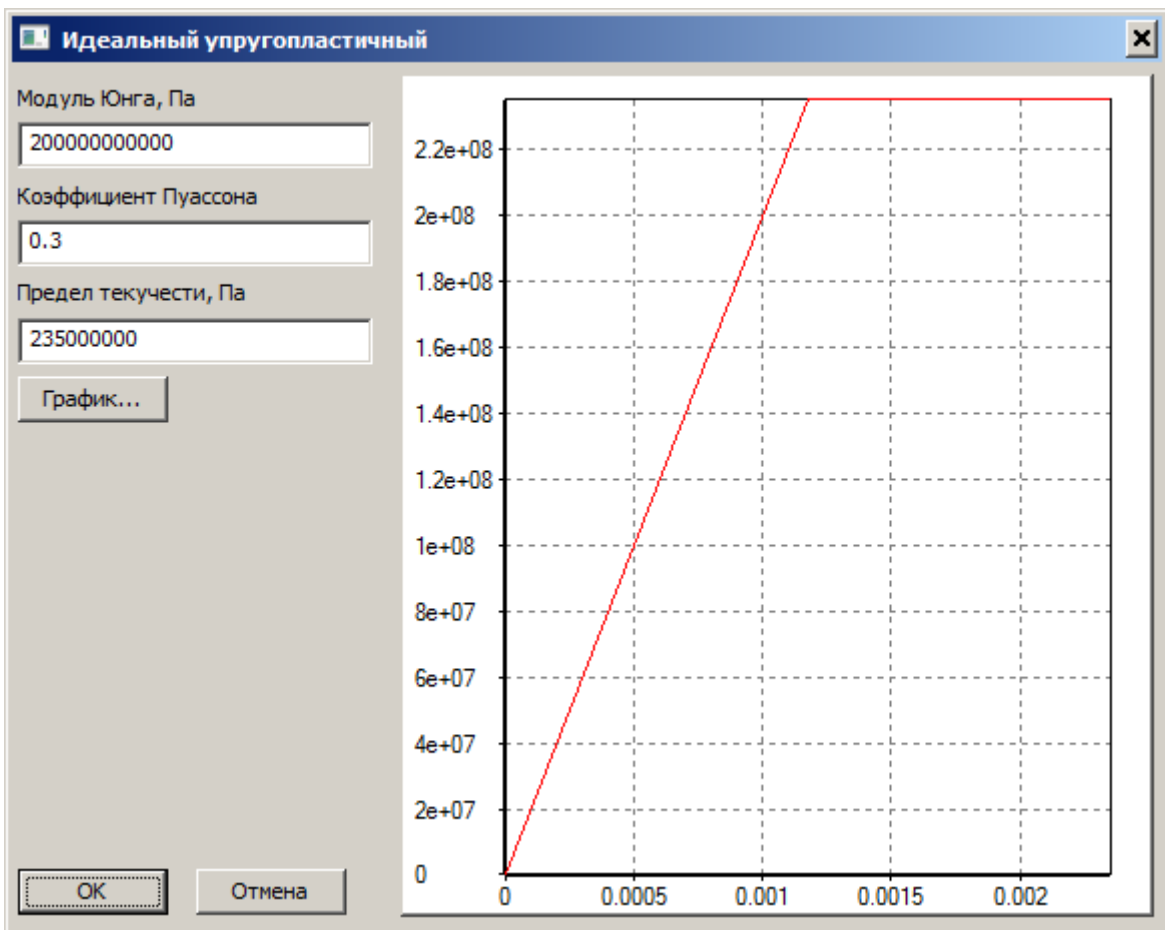


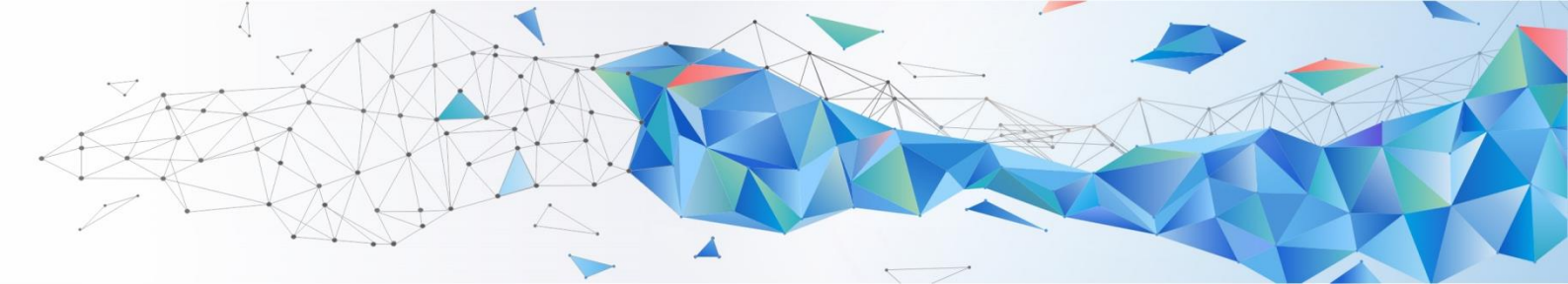
Законы упрочнения

Физическая нелинейность

Идеальный упругопластичный

Изотропное билинейное упрочнение



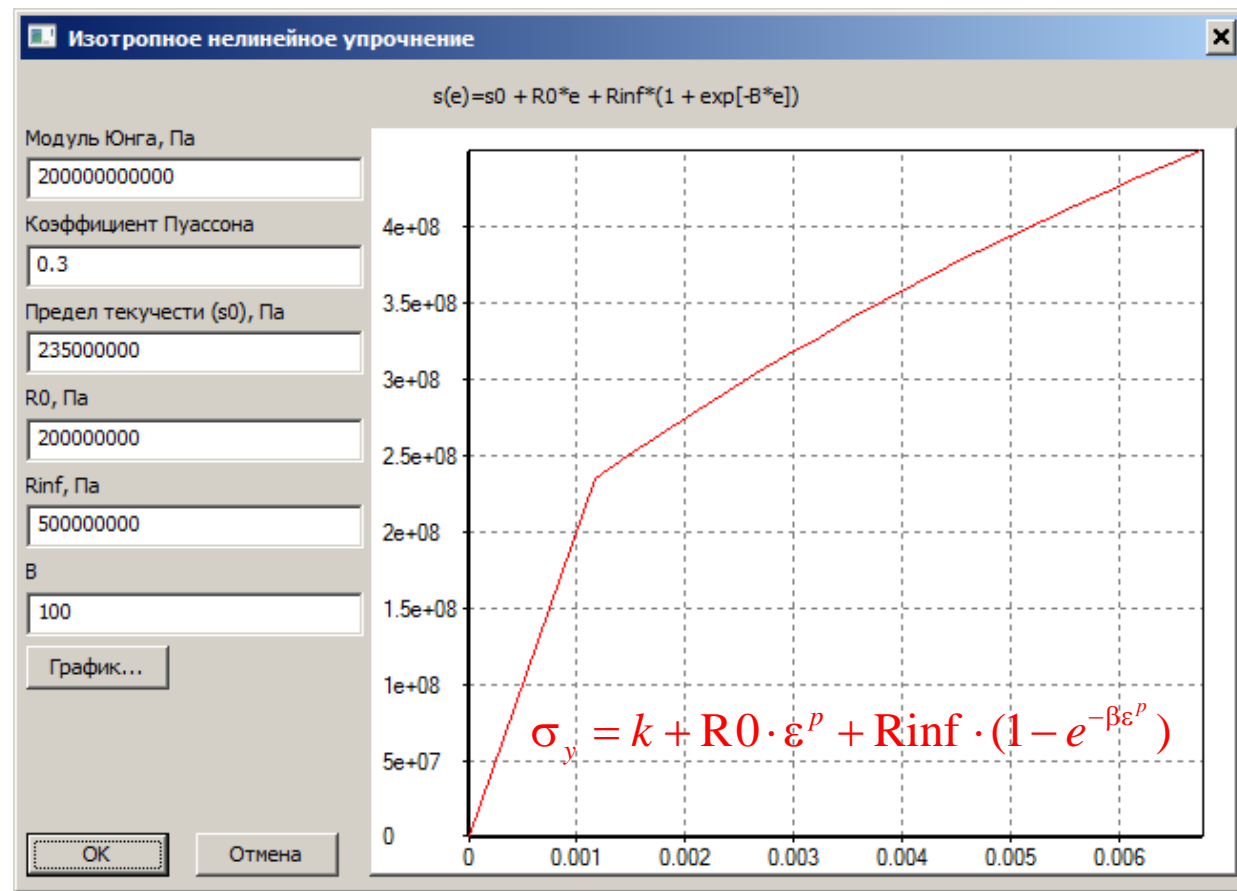
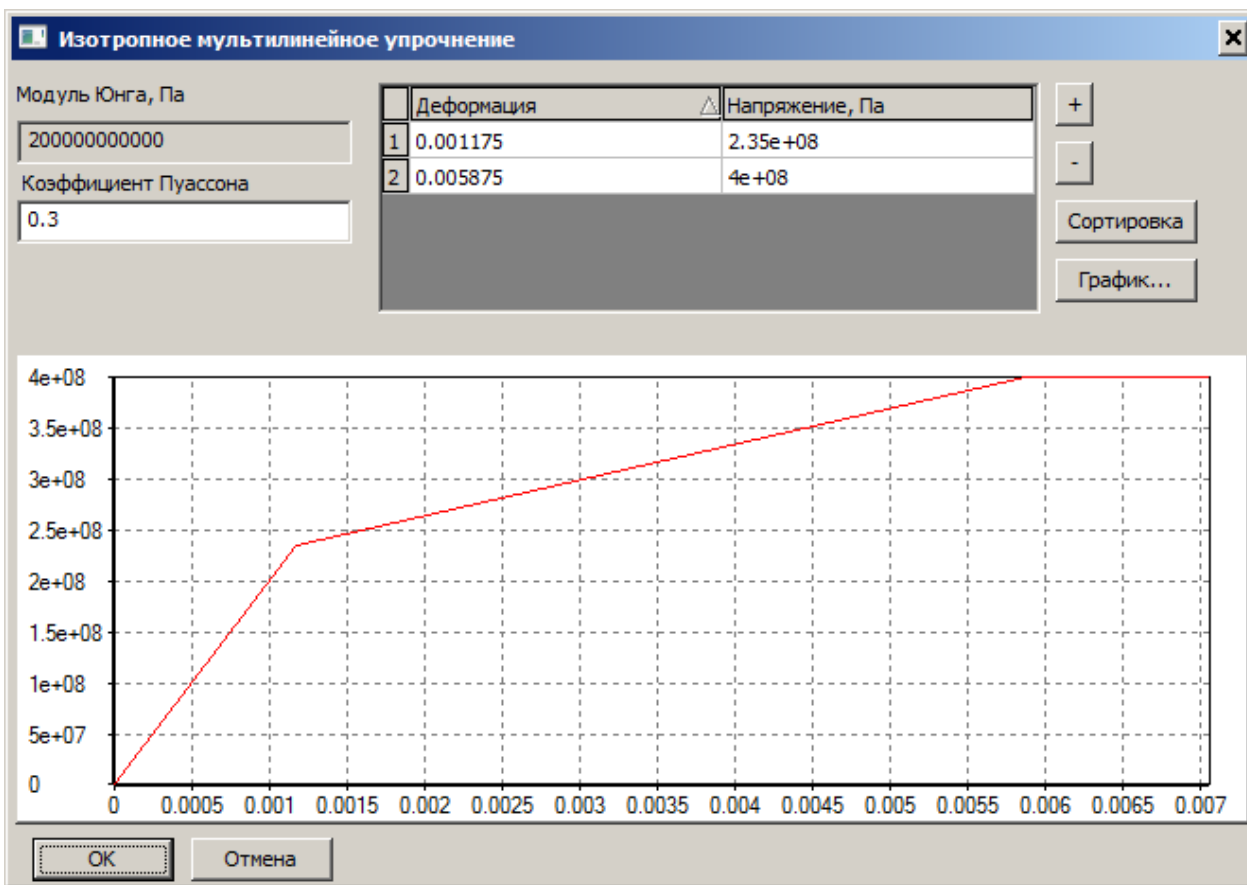


Законы упрочнения

Физическая нелинейность

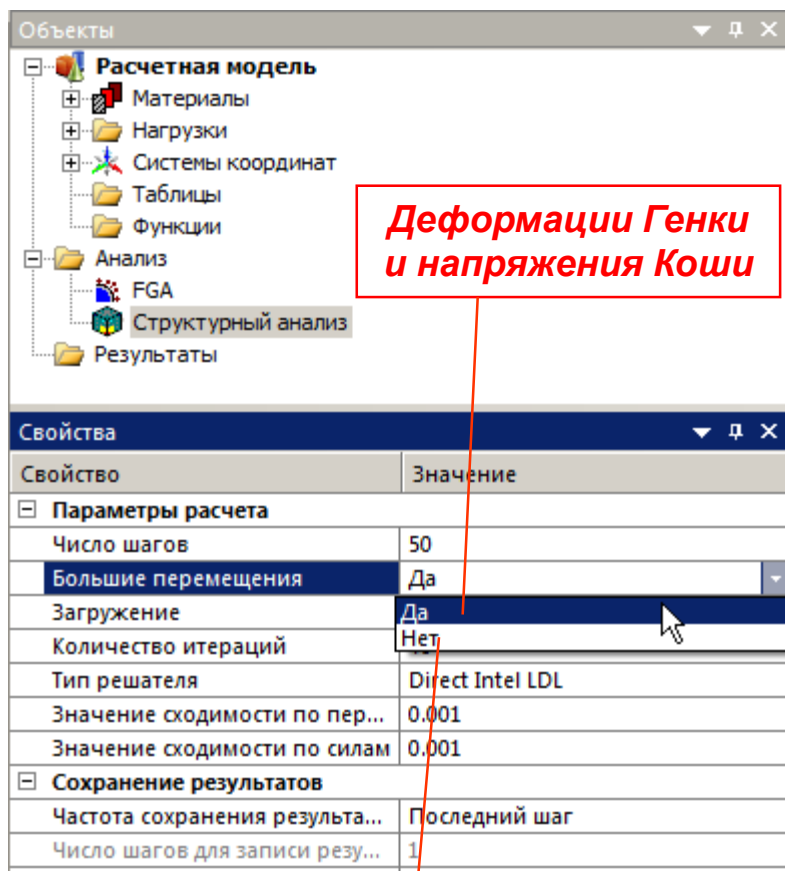
Изотропное мультILINEЙное упрочнение

Изотропное нелинейное упрочнение





Структурный анализ



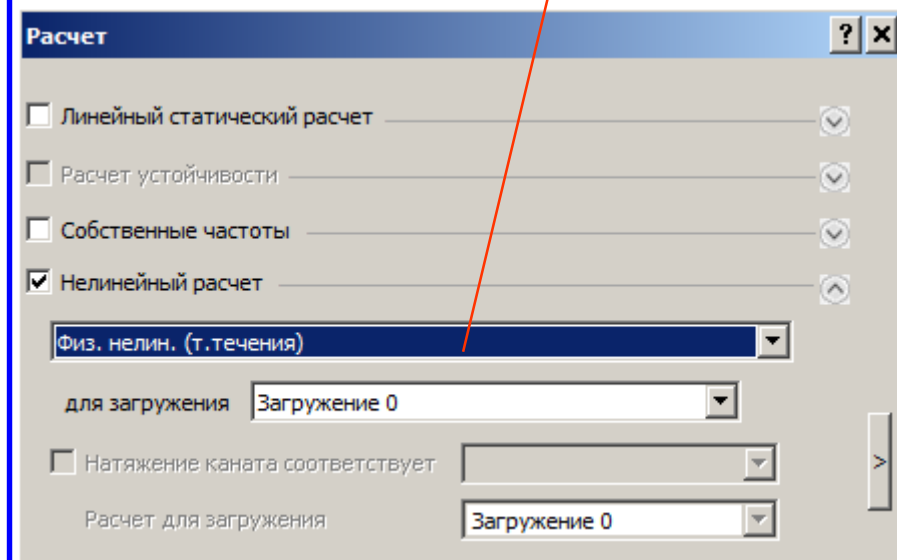
Инженерные деформации и напряжения

vs

Физическая нелинейность

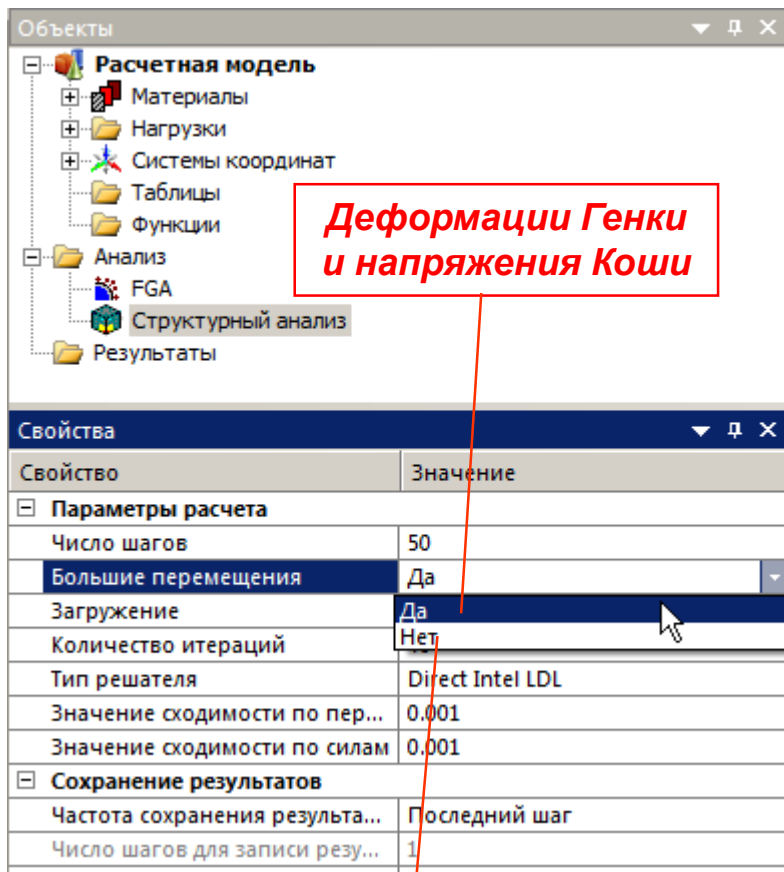
Нелинейный расчет. Физическая нелинейность (теория течения)

Инженерные деформации и напряжения





Структурный анализ

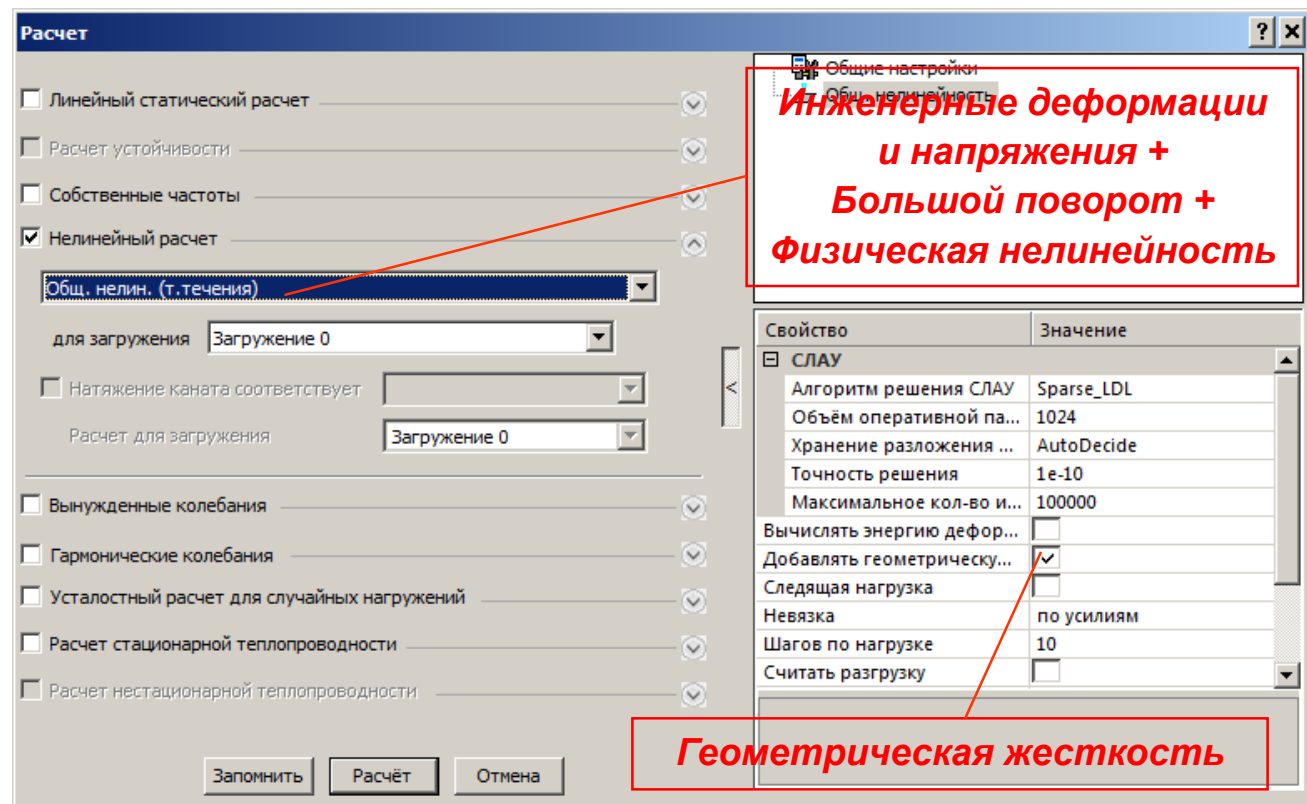


VS

Инженерные деформации и напряжения

«Общая» нелинейность

Нелинейный расчет. Физическая нелинейность (теория течения)





Контактное взаимодействие

Виды контактного взаимодействия

«Склейка»

Неразделяемый

Жесткий

С трением

Скользкий

Линейный

Нелинейный

Технология контактного взаимодействия

Поверхность - поверхность

Узел - узел

Поверхность - узел

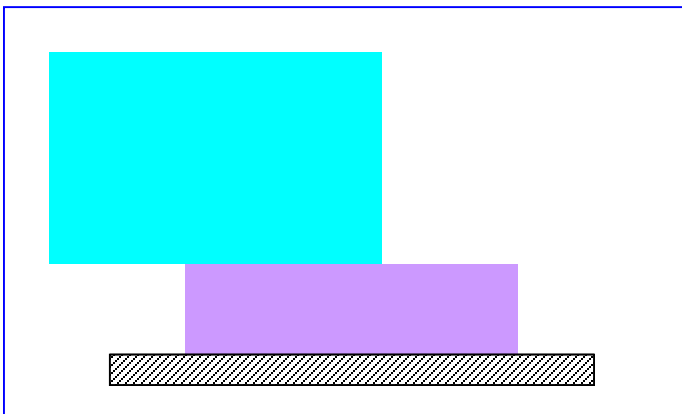
Метод численной реализации

- **Метод штрафа**
- Метод множителей Лагранжа
- Дополненный метод множителей Лагранжа
- Множественные ограничения
- Метод Ницше
-

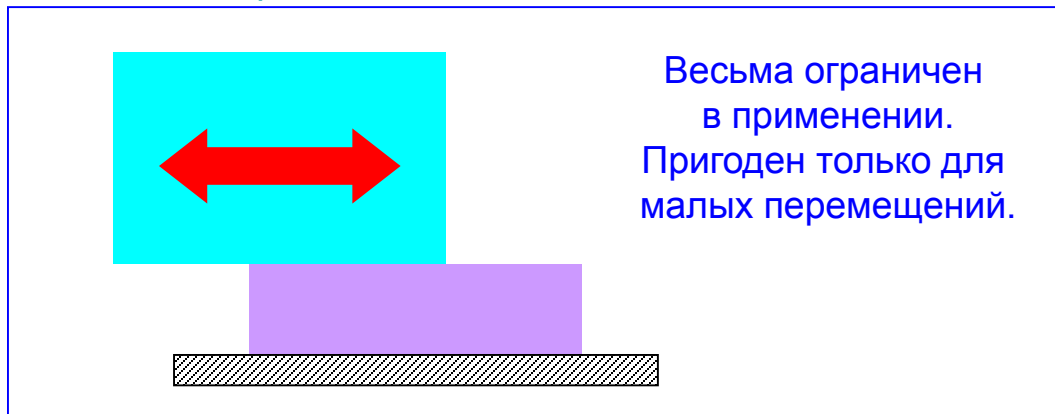


Контактное взаимодействие. Виды контакта

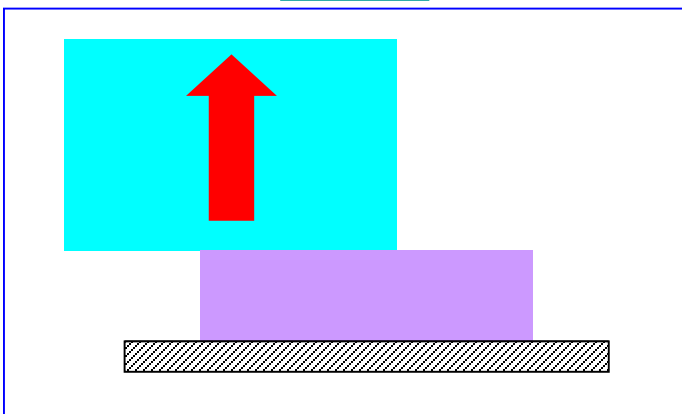
Склейка



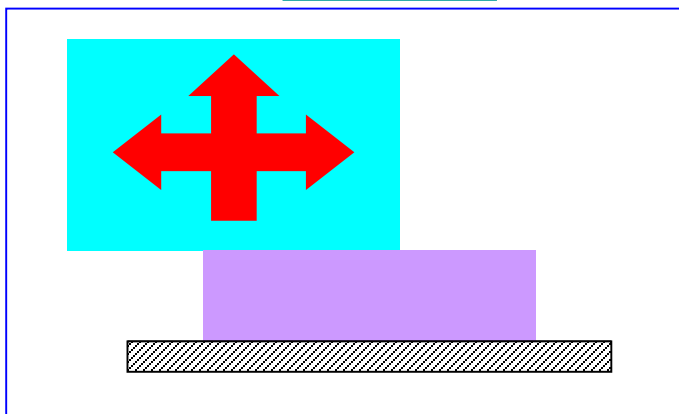
Неразделяемый



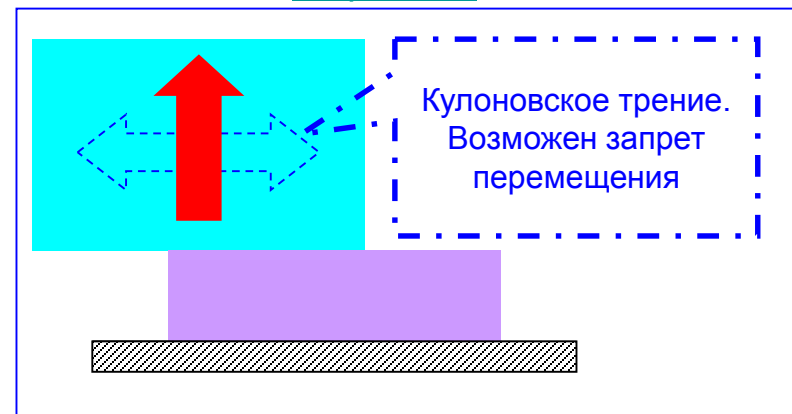
Жесткий



Скользящий



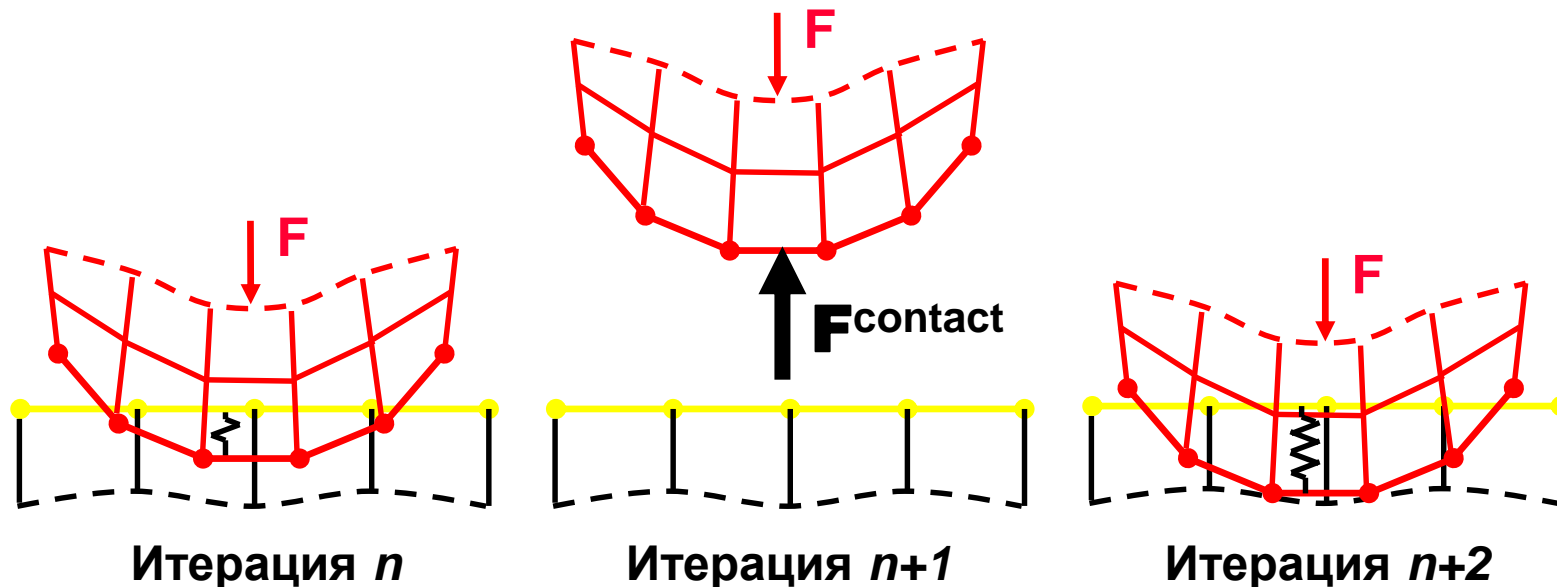
С трением





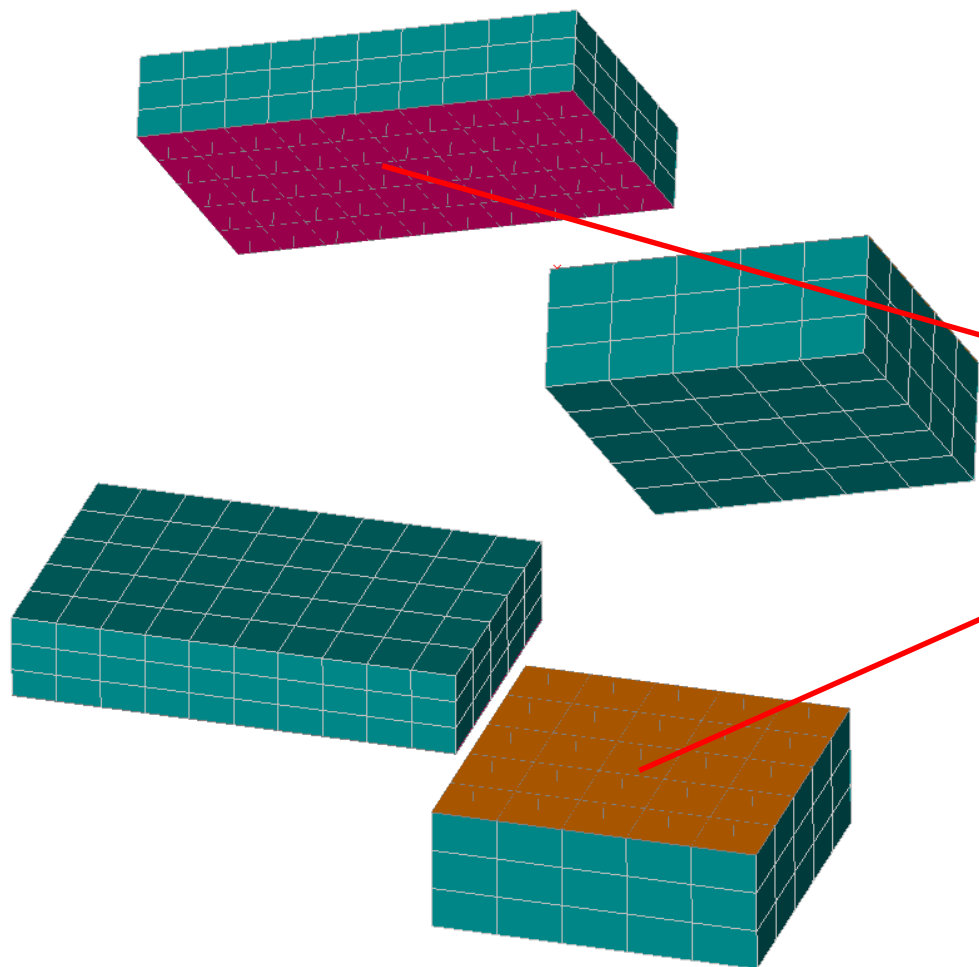
Контактное взаимодействие. Проблема жесткости выбора жесткости

- Опять проблема:
 - Минимальное взаимное проникновение поверхностей дает наилучшее точность решения.
 - Следовательно контактная жесткость должна быть очень большой.
 - Однако очень большая жесткость затрудняет сходимость решения.
 - В процессе решения могут наблюдаться постоянные осцилляции **невязки**.





Контактное взаимодействие. Свойства контактных зон



Контактная зона

Информация о контактных элементах

Количество зон 1

Список контактных зон:

- Контактная зона 0

Удалить зону

Контактная зона

Количество элементов 140

Слой Контактные элементы

Инвертировать систему координат

Целевая зона

Количество элементов 140

Слой Контактные элементы

Инвертировать систему координат

Поменять местами

Тип контакта

- ☒ Жесткий
- ☐ Скользящий
- ☐ Склейка

Жесткости

☒ Автоопределение

Нормальная 10000.00 Н/мм

Тангенциальная 1000.00 Н/мм

Старт

Радиус 1.0000 мм

Максимально возможное проникновение 0.000000 мм

Коэффициент трения 0.15

Задать для всех зон

Применить

OK



Структурный анализ

Объекты

- Расчетная модель
 - Материалы
 - Нагрузки
 - Системы координат
 - Таблицы
 - Функции
- Анализ
 - FGA
 - Структурный анализ**
 - Результаты

Жесткий и скользящий контакт

Свойства

Свойство	Значение
Параметры расчета	
Число шагов	50
Большие перемещения	Да
Загружение	Загружение 0
Количество итераций	40
Тип решателя	Direct Intel LDL
Значение сходимости по пер...	0.001
Значение сходимости по силам	0.001
Сохранение результатов	
Частота сохранения результа...	Последний шаг
Число шагов для записи резу...	1

VS

Контактное взаимодействие

Нелинейный расчет

Все доступные виды контакта

Расчет

- ☐ Линейный статический расчет
- ☐ Расчет устойчивости
- ☐ Собственные частоты
- ☒ Нелинейный расчет

Геометрическая нелинейность

- Геометрическая нелинейность
- Контактное взаимодействие
- Односторонние опоры и канаты
- Физ. нелин. (т. течения)
- Общ. нелин. (т. течения)
- Трещины - XFEM
- Трещины-жизнь/смерть элементов



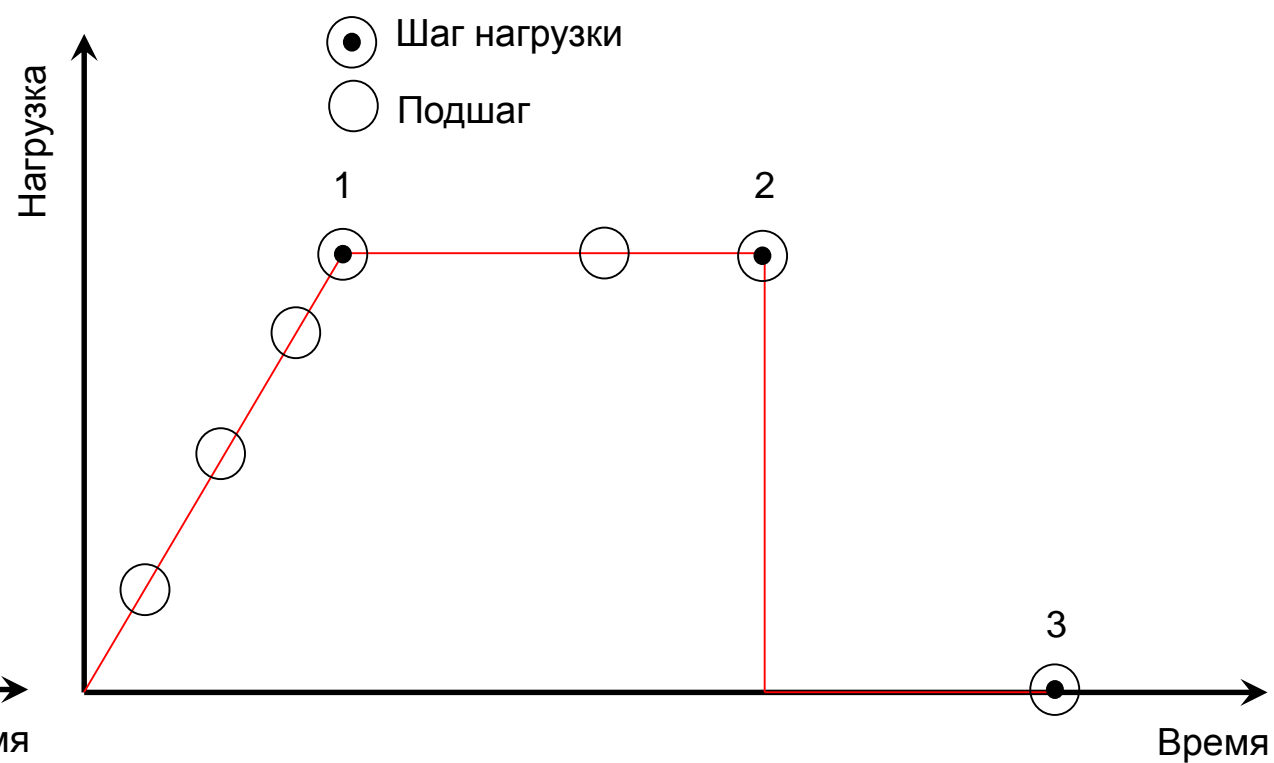
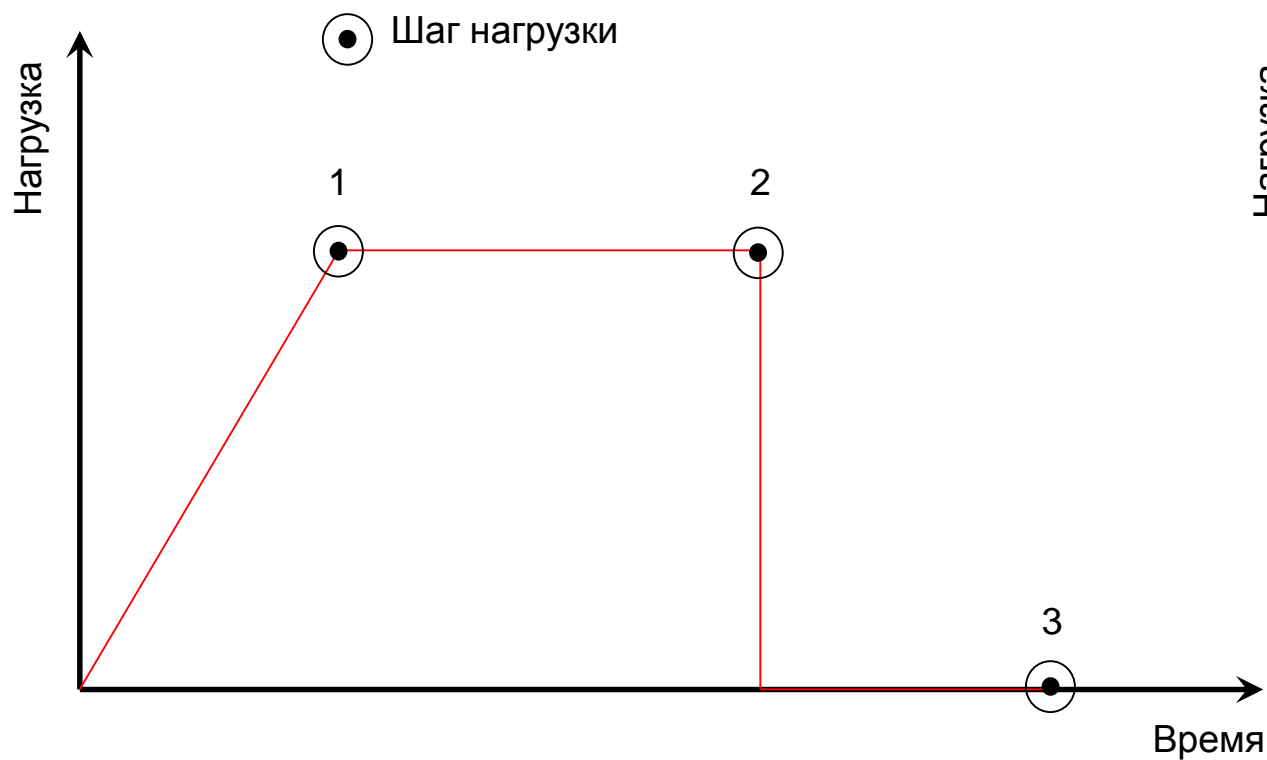
Возможности нелинейных расчетов

	Структурный анализ	Нелинейный расчет			
		Геометрическая нелинейность	Физическая нелинейность	Общая нелинейность	Контактное взаимодействие
Большие перемещения	+	+	-	+	-
Геометрическая жесткость	(+)	+	-	+	-
Большой поворот	(+)	+	-	+	-
Большие деформации	+	-	-	-	-
Пластические материалы	+	-	-	+	-
Линейный контакт	-	+	+	+	+
Нелинейный контакт	+	+	+	+	+
Стержни	-	+	-	+	+
Пластины	-	+	+	+	+
Объемные элементы	+	+	+	+	+



Нелинейный анализ. Что дальше?

Шаг нагрузки и подшаг





Нелинейный анализ. Что дальше?

Создание шагов для нагрузок

Объекты

- Расчетная модель
 - Материалы
 - Нагрузки
 - Системы координат
 - Таблицы
 - Функции
- Анализ
 - FGA
 - Структурный анализ
- Результаты

Свойства

Свойство	Значение
Параметры расчета	
Число шагов	15
Большие перемеще...	Да
Загружение	Загружение 0
Количество итераций	40
Тип решателя	Direct Intel LDL
Значение сходимос...	0.001
Значение сходимос...	0.001
Сохранение результатов	
Частота сохранения...	Последний шаг
Число шагов для за...	1

Таблица

Шаги	Время,с
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10
11	11
12	12
13	13
14	14
15	15

Таблица График

Создание нагрузок для структурного анализа

Объекты

- Расчетная модель
 - Материалы
 - Нагрузки
 - Системы координат
 - Таблицы
 - Функции
- Анализ
 - FGA
 - Структурный анализ
- Результаты

Нагрузки

- СИЛА!!!
- Удалить

Сила
Перемещение
Давление



Задание значений нагрузки «Давление» с помощью таблицы. Для каждого момента времени указывается свое значение

Нелинейный анализ. Что дальше?

Графическое отображение значений нагрузки, заданных таблично

Объекты

- Расчетная модель
 - Материалы
 - Нагрузки
 - Системы координат
 - Таблицы
 - Функции
- Анализ
 - FGA
 - Структурный анализ
 - Давление
- Результаты

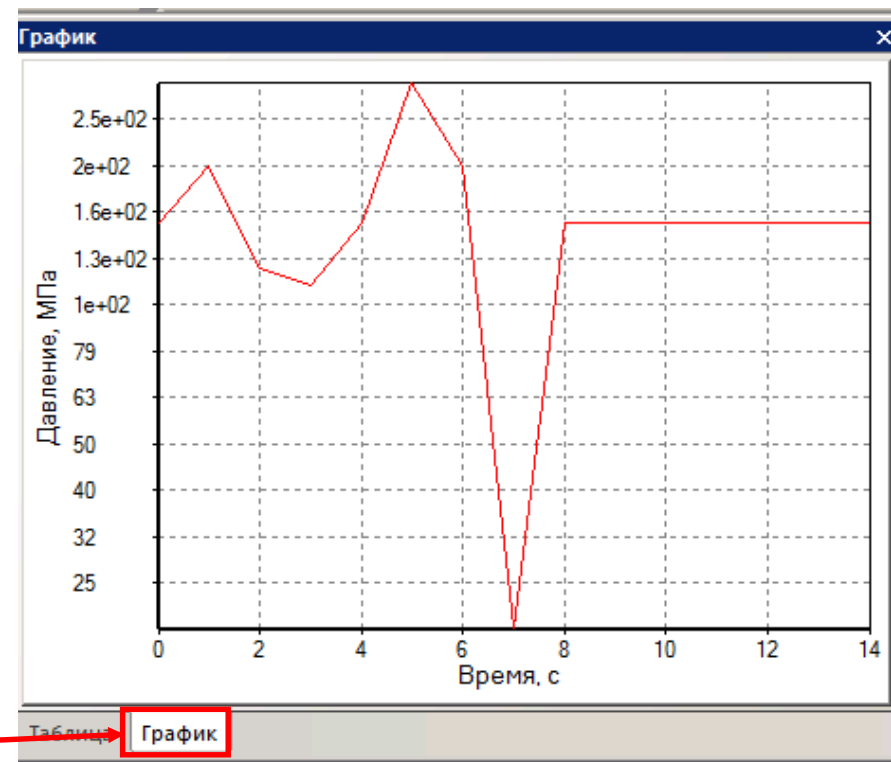
Свойства

Свойство	Значение
Значение	Таблица
Элементы	
Тип элементов	Объемные элементы
Элементы	Установить Очистить
Количество	1
Номер поверхности	1
Задание поверхностей	Установить Очистить

Таблица

Шаги	Время,с	Давление,МПа
1	1	150
2	2	200
3	3	120
4	4	110
5	5	150
6	6	300
7	7	200
8	8	20
9	9	150
10	10	150
11	11	150
12	12	150
13	13	150
14	14	150
15	15	150

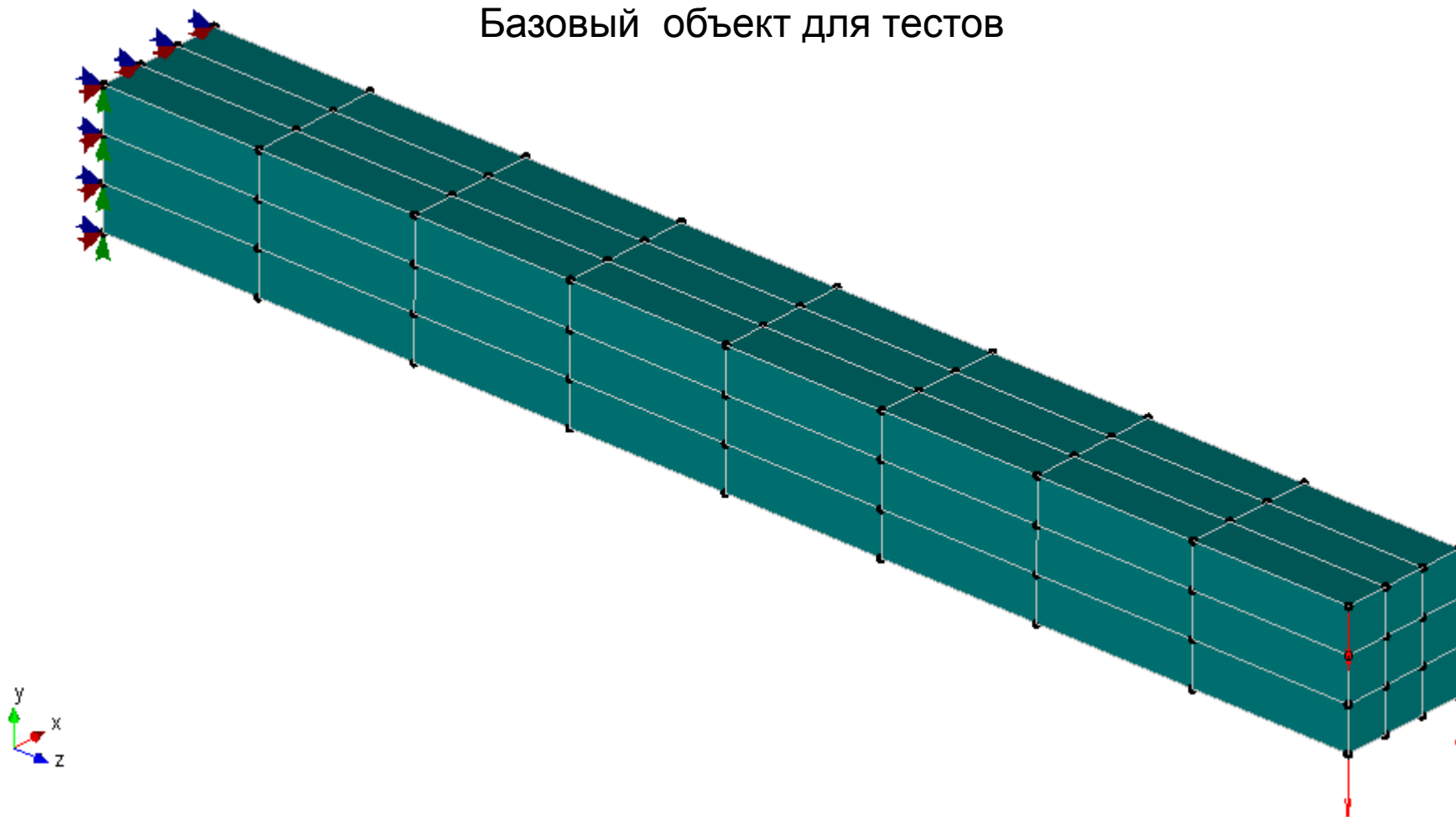
Таблица График





Примеры

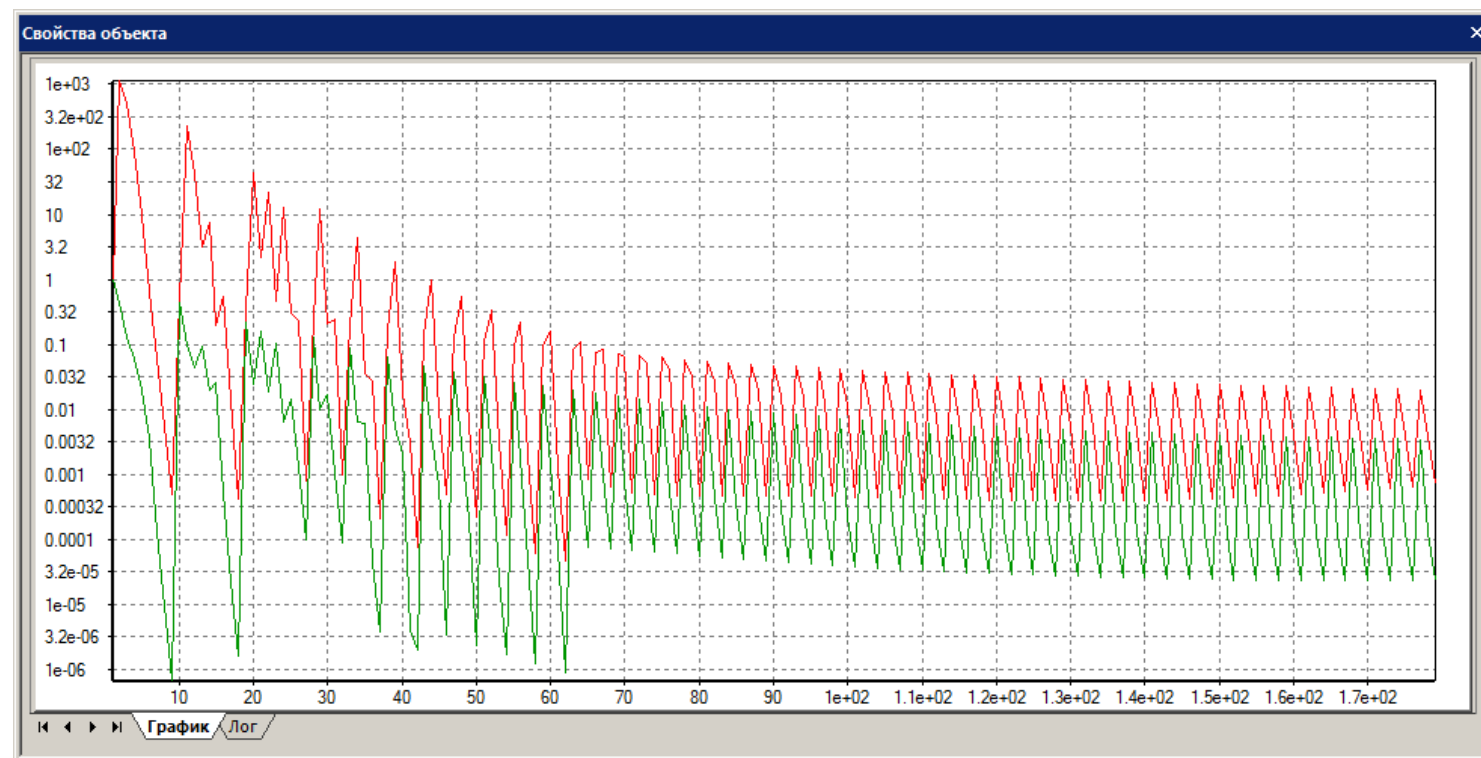
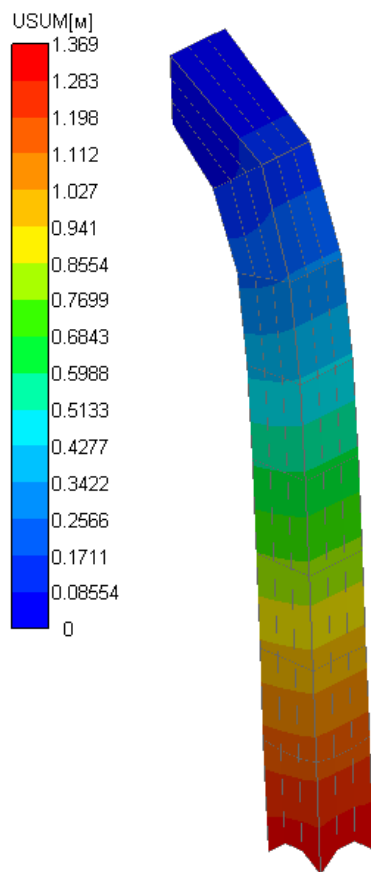
Базовый объект для тестов





Примеры

Сила $50 \cdot 10^6$ Н, линейно-упругий материал

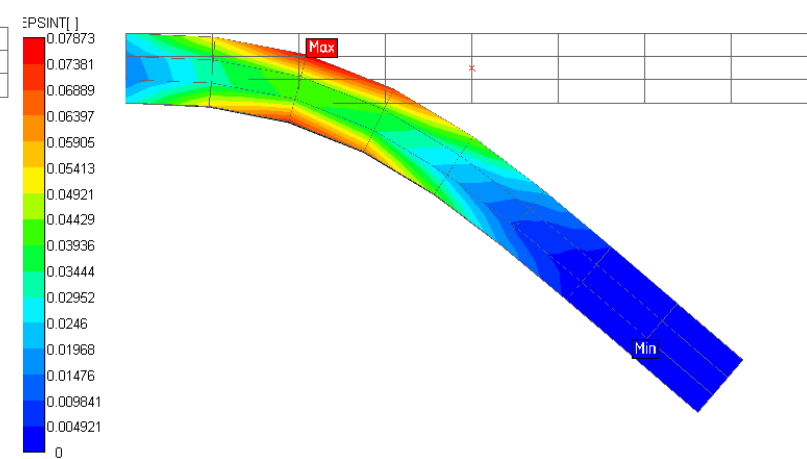
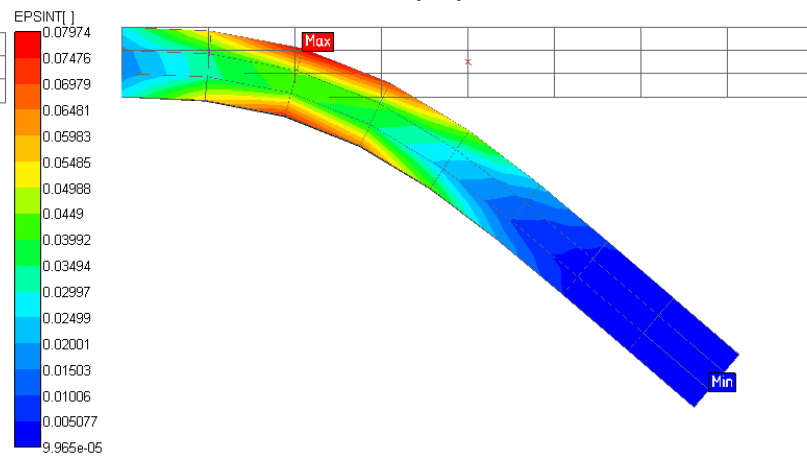
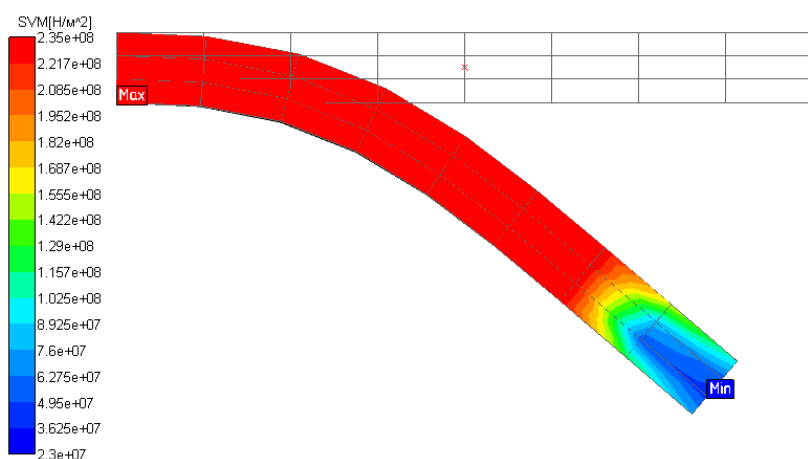




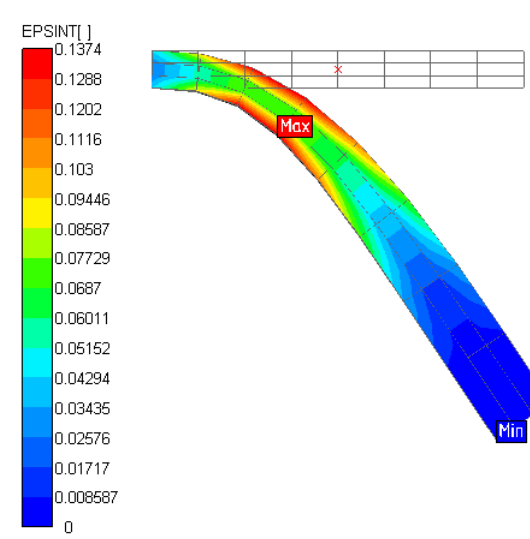
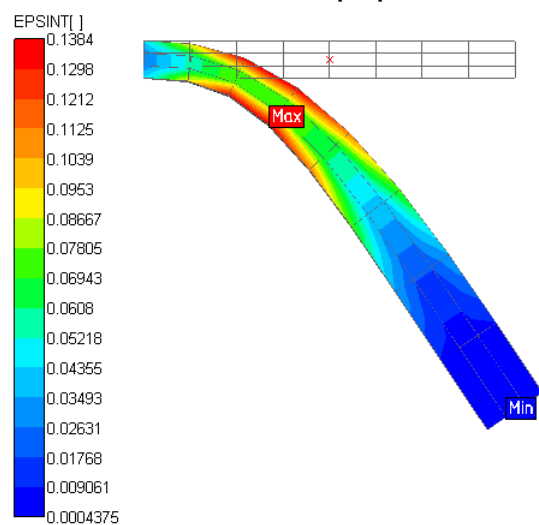
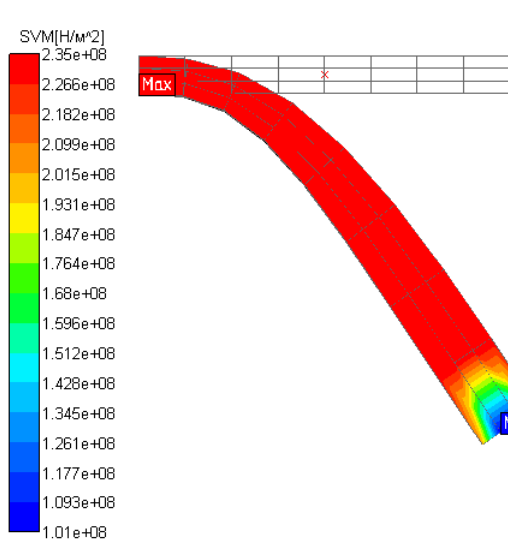
Сила 58750 Н, идеальный упруго-пластичный материал

Примеры

Большие деформации



Малые деформации



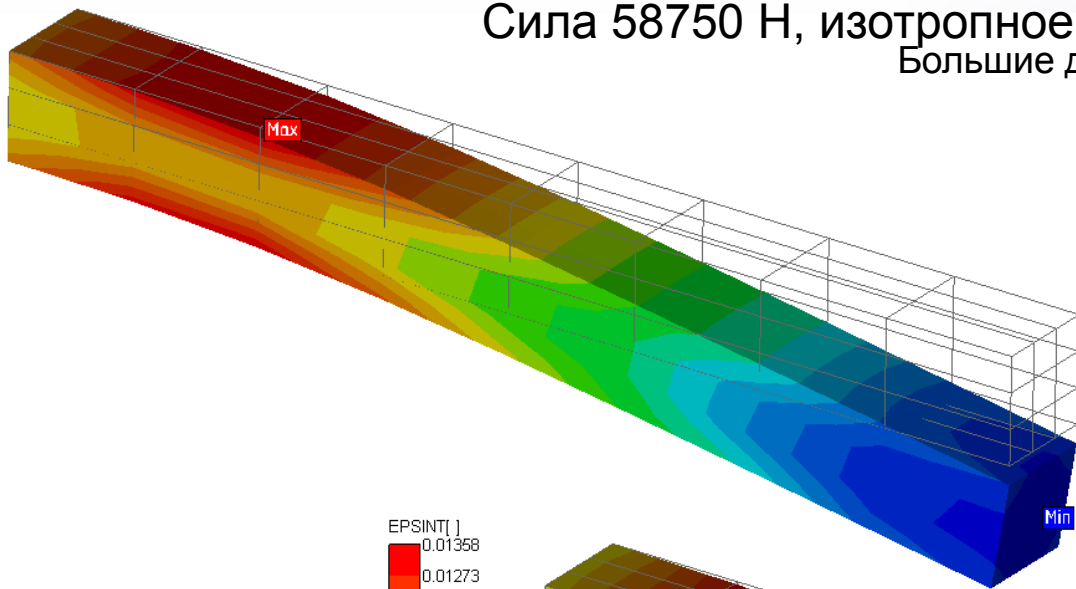


Сила 58750 Н, изотропное билинейное упрочнение
Большие деформации

Примеры

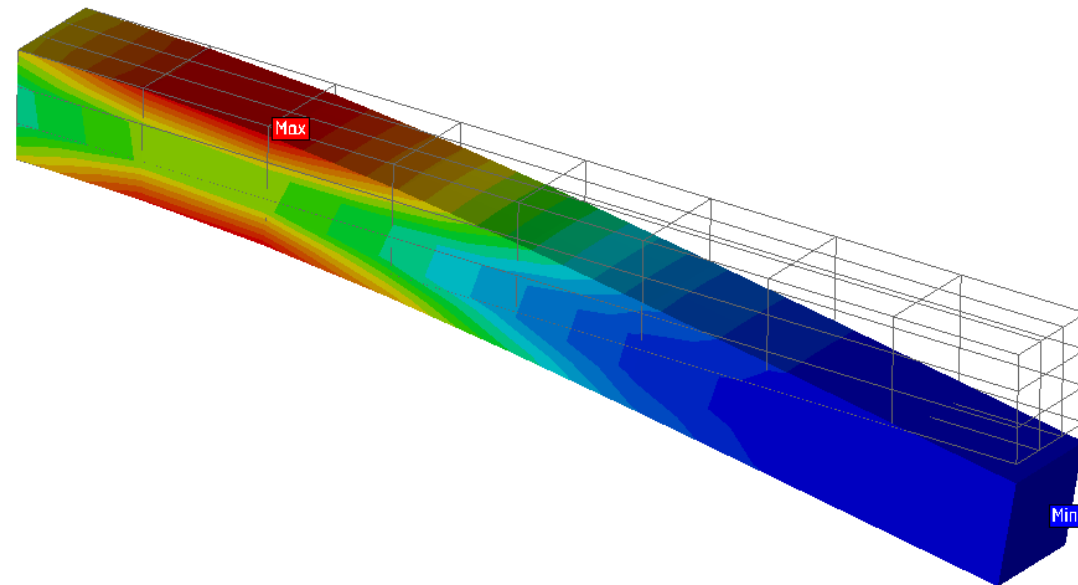
SVM[H/M²]

5.368e+08
5.05e+08
4.731e+08
4.413e+08
4.094e+08
3.776e+08
3.458e+08
3.139e+08
2.821e+08
2.502e+08
2.184e+08
1.865e+08
1.547e+08
1.228e+08
9.099e+07
5.915e+07
2.731e+07



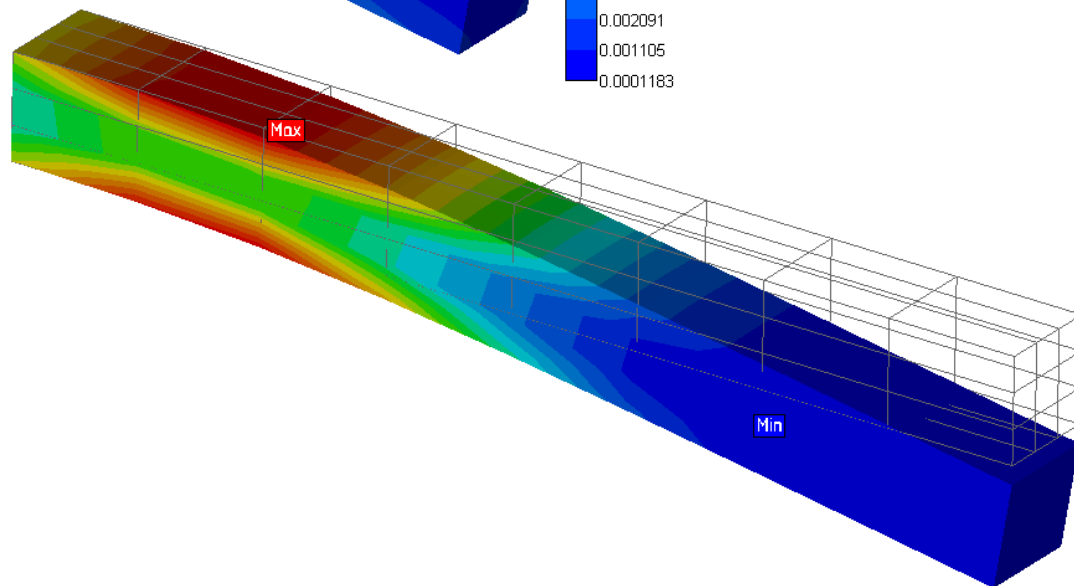
EPSINT[]

0.0159
0.01492
0.01393
0.01294
0.01196
0.01097
0.009983
0.008996
0.00801
0.007024
0.006037
0.005051
0.004064
0.003078
0.002091
0.001105
0.0001183



EPSINT[]

0.01358
0.01273
0.01188
0.01103
0.01018
0.009334
0.008485
0.007637
0.006788
0.00594
0.005091
0.004243
0.003394
0.002546
0.001697
0.0008485
0

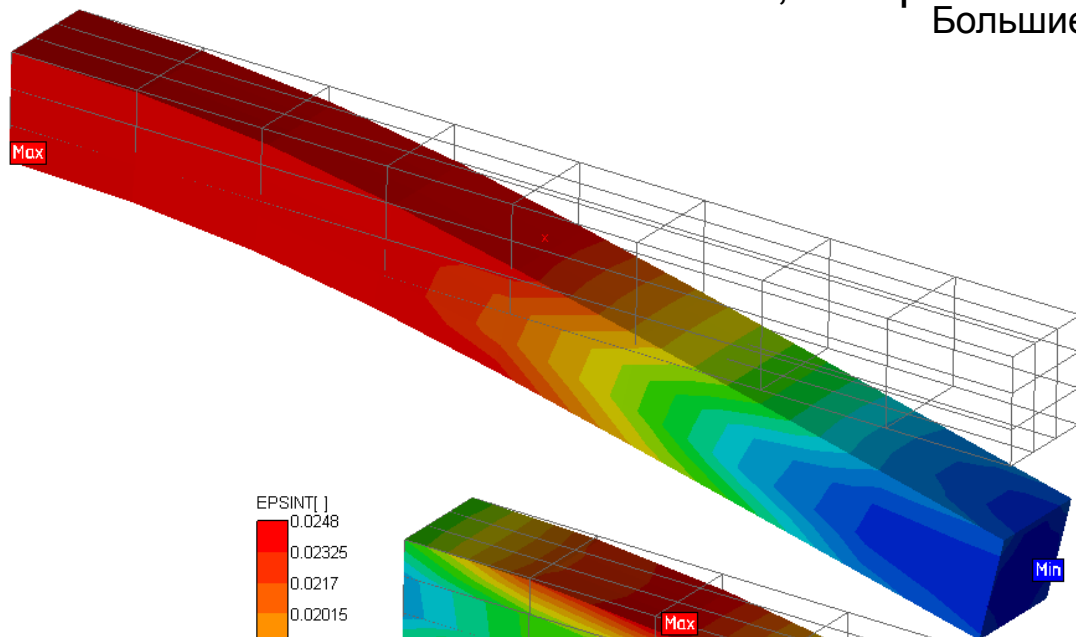




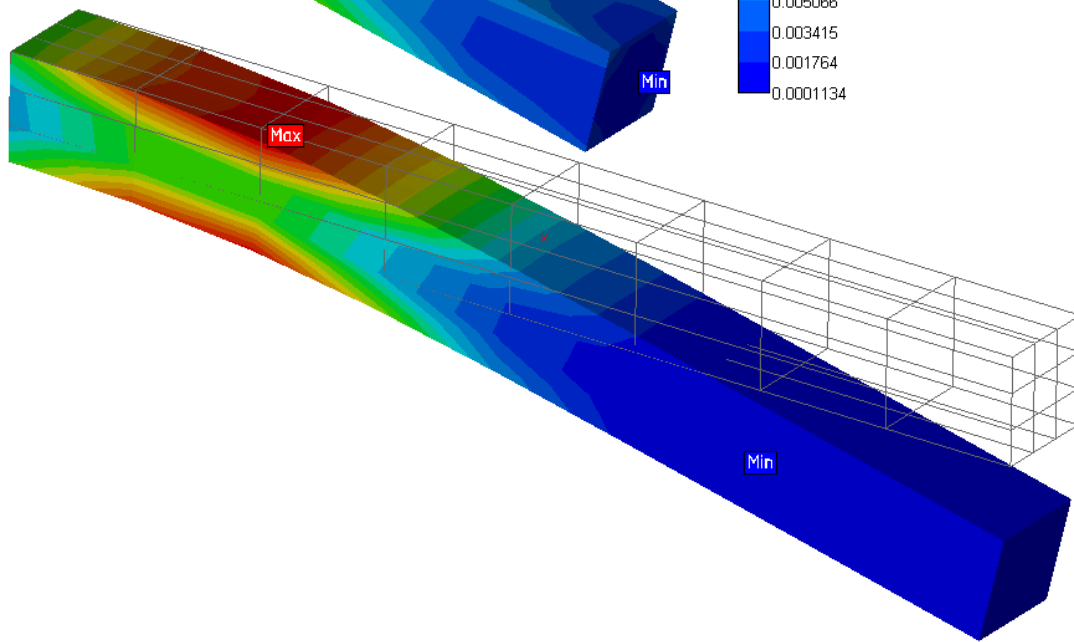
Сила 58750 Н, изотропное мультилинейное упрочнение
Большие деформации

Примеры

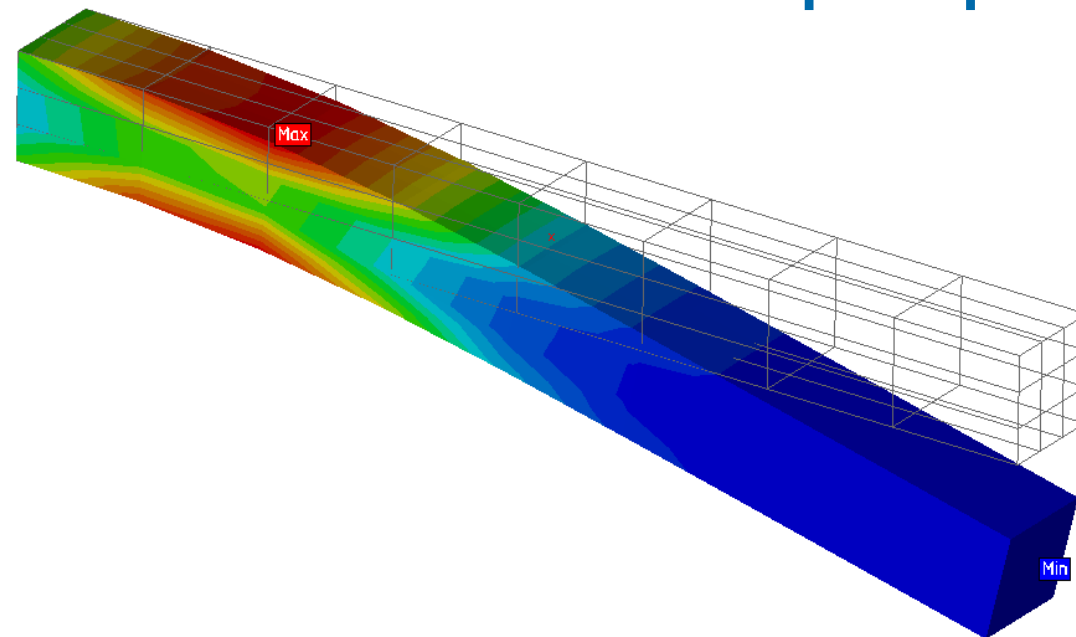
SVM[H/m²]
4e+08
3.766e+08
3.533e+08
3.299e+08
3.065e+08
2.832e+08
2.598e+08
2.364e+08
2.131e+08
1.897e+08
1.664e+08
1.43e+08
1.196e+08
9.626e+07
7.289e+07
4.953e+07
2.616e+07



EPSINT[]
0.0248
0.02325
0.0217
0.02015
0.0186
0.01705
0.0155
0.01395
0.0124
0.01085
0.009299
0.00775
0.0062
0.00465
0.0031
0.00155
0



EPSINT[]
0.02653
0.02488
0.02323
0.02158
0.01993
0.01827
0.01662
0.01497
0.01332
0.01167
0.01002
0.008368
0.006717
0.005066
0.003415
0.001764
0.0001134

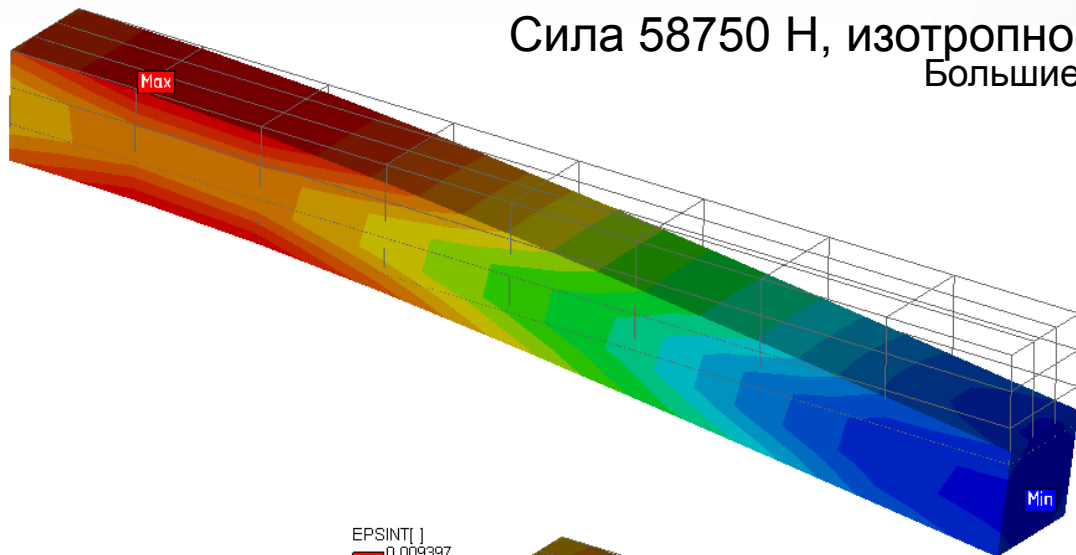




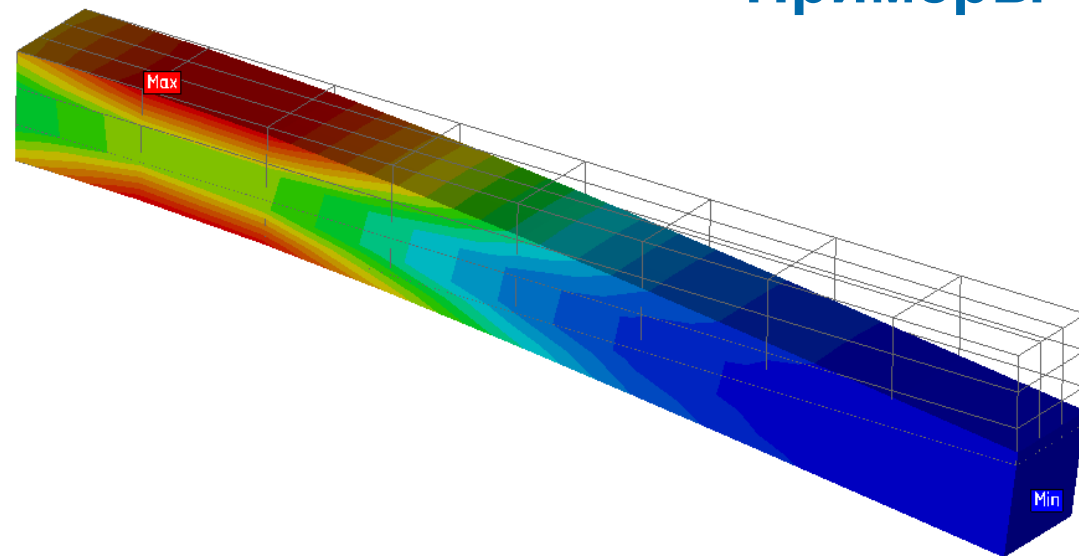
Сила 58750 Н, изотропное нелинейное упрочнение
Большие деформации

Примеры

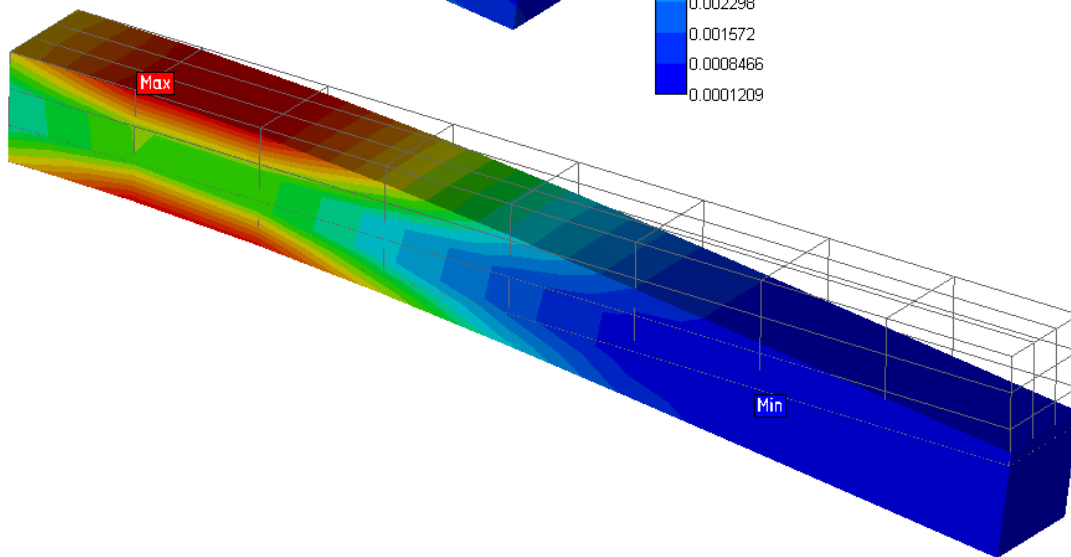
SVM[H/m²]
5.391e+08
5.072e+08
4.752e+08
4.433e+08
4.113e+08
3.794e+08
3.474e+08
3.155e+08
2.835e+08
2.516e+08
2.196e+08
1.877e+08
1.557e+08
1.238e+08
9.181e+07
5.986e+07
2.791e+07



EPSINT[]
0.01173
0.01101
0.01028
0.009555
0.008829
0.008104
0.007378
0.006652
0.005927
0.005201
0.004475
0.003749
0.003024
0.002298
0.001572
0.0008466
0.0001209



EPSINT[]
0.009397
0.00881
0.008223
0.007635
0.007048
0.006461
0.005873
0.005286
0.004699
0.004111
0.003524
0.002937
0.002349
0.001762
0.001175
0.0005873
0



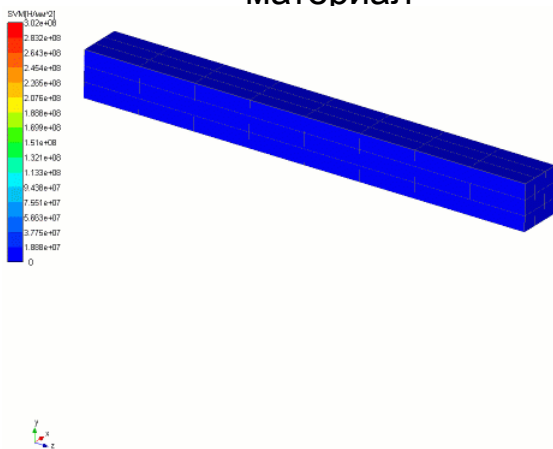


Примеры

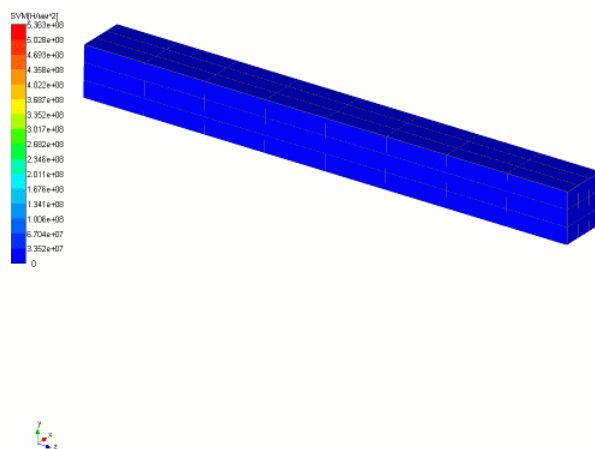
Анимация напряжений по Мизесу

Большие деформации

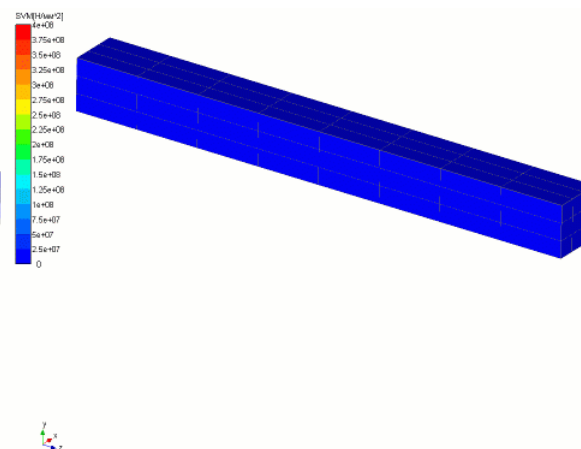
идеальный упруго-пластичный материал



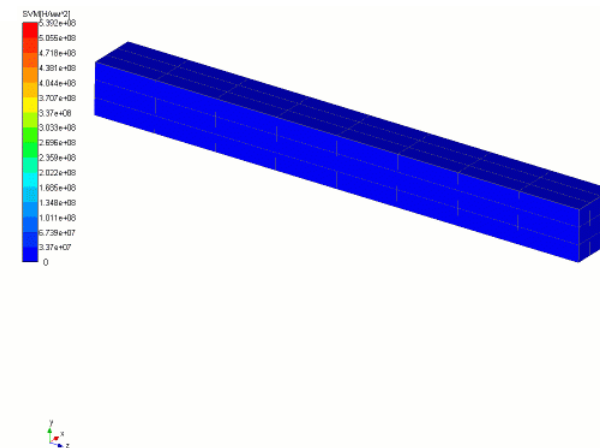
изотропное билинейное упрочнение



изотропное мультILINEEYное упрочнение

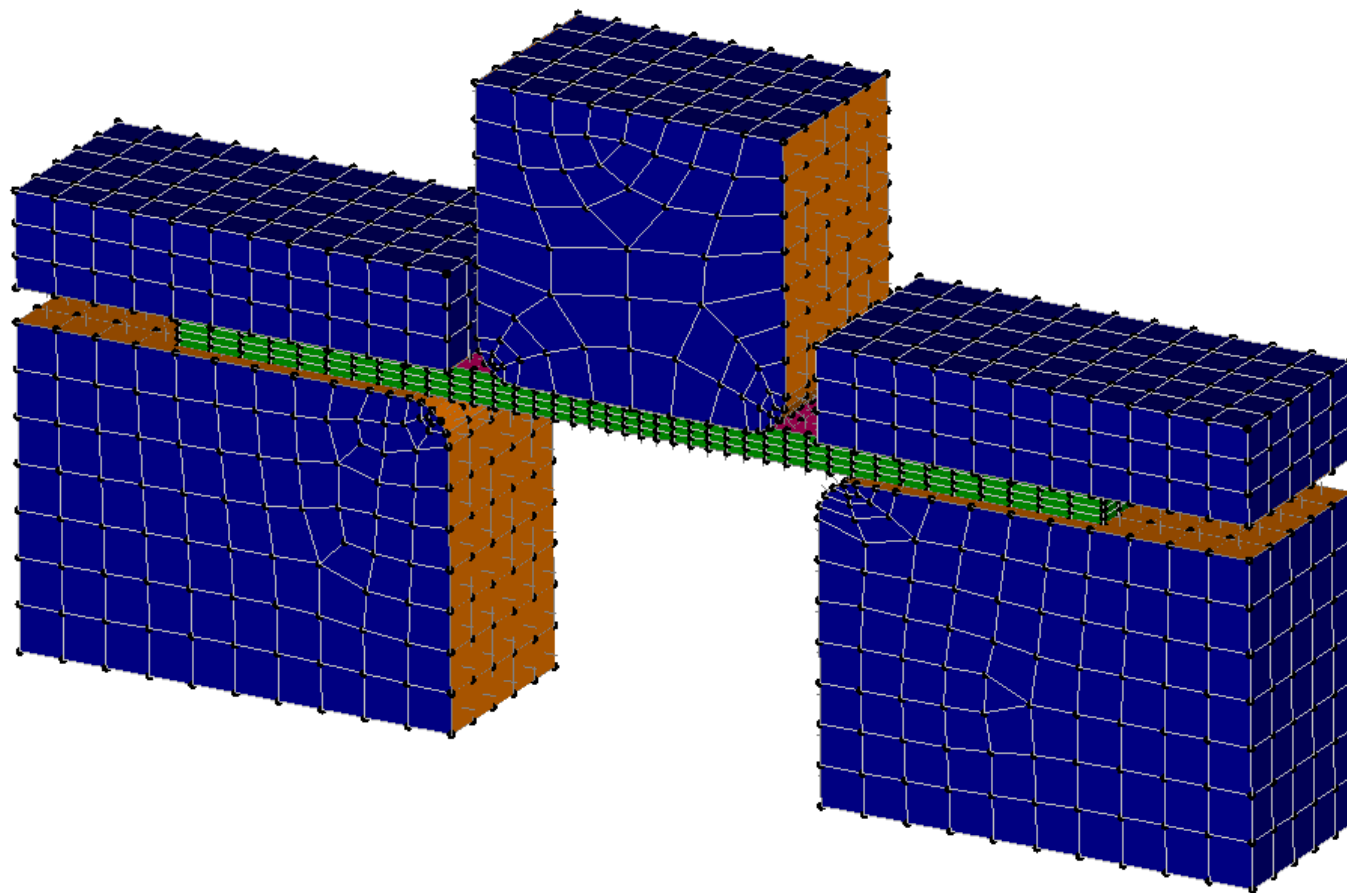


изотропное нелинейное упрочнение





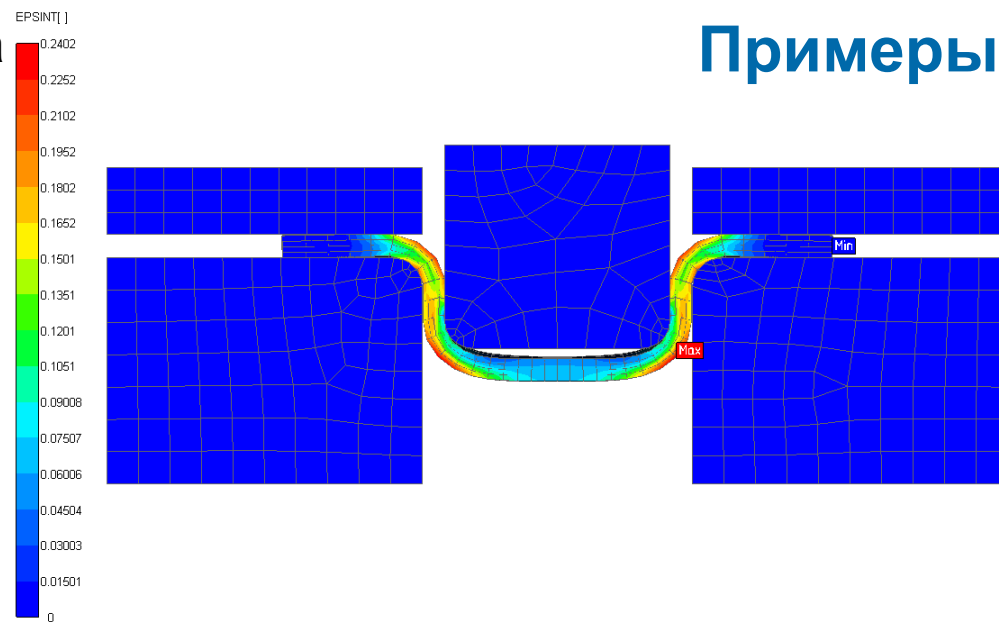
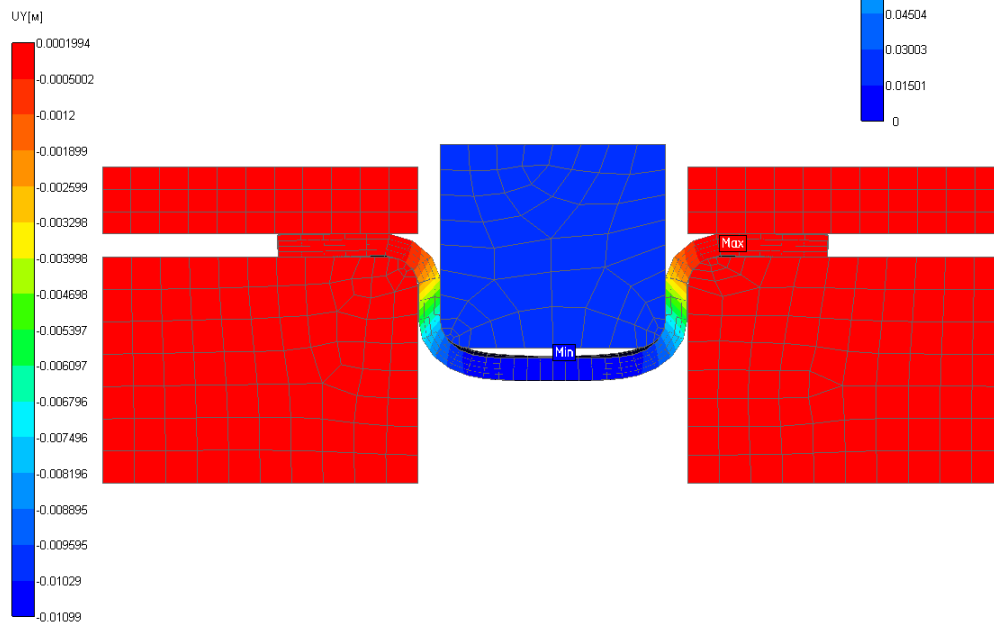
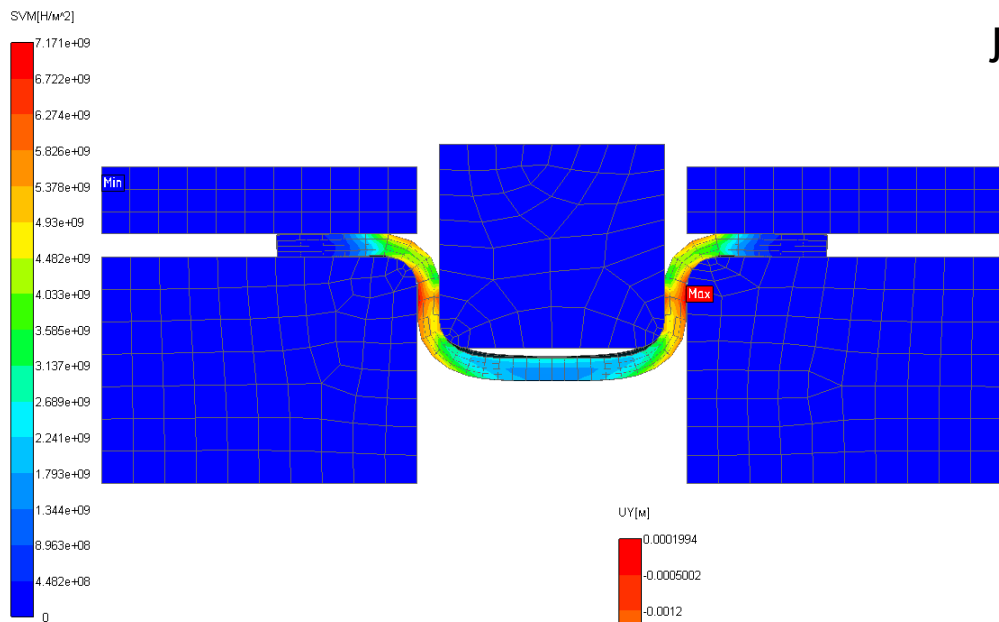
Листовая штамповка





Листовая штамповка

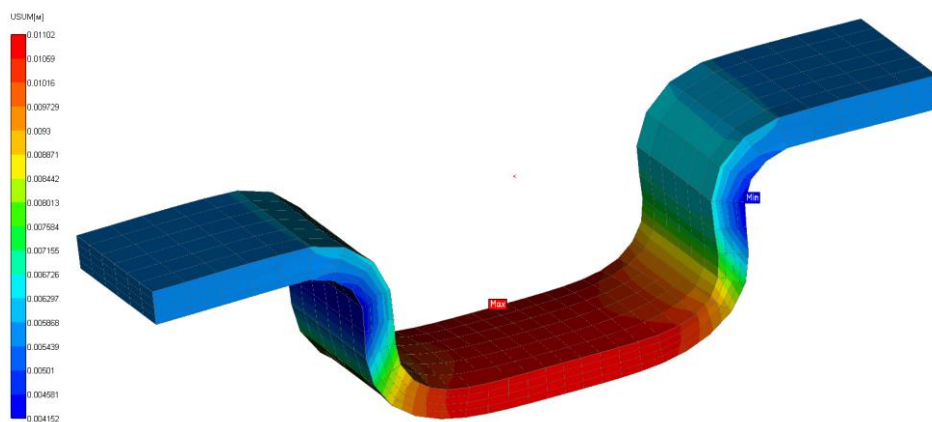
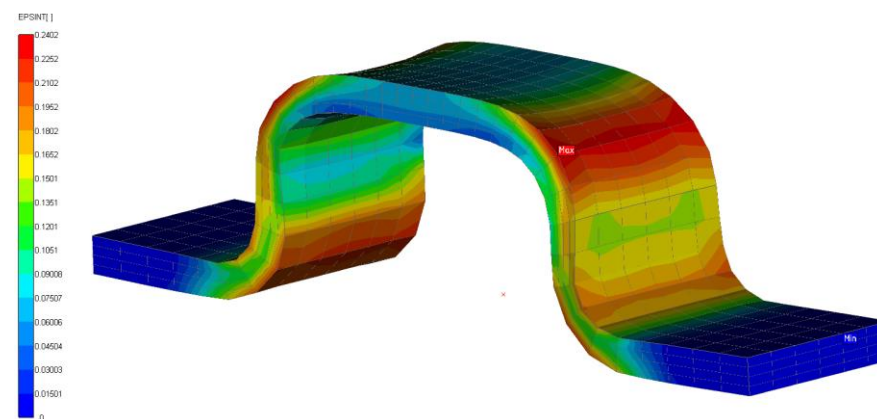
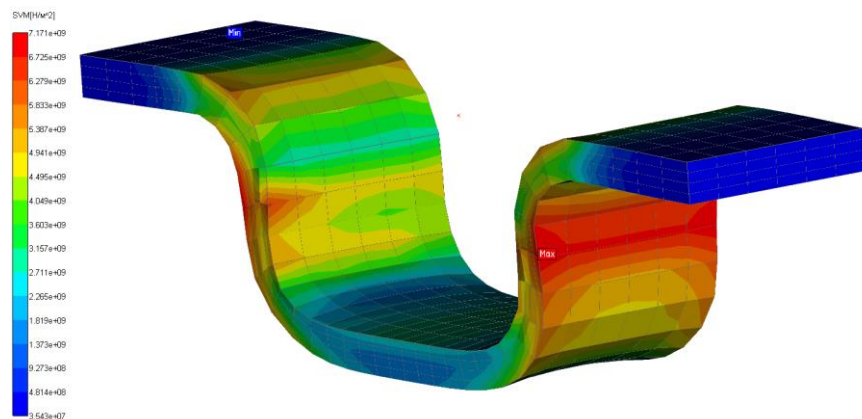
Примеры





Листовая штамповка

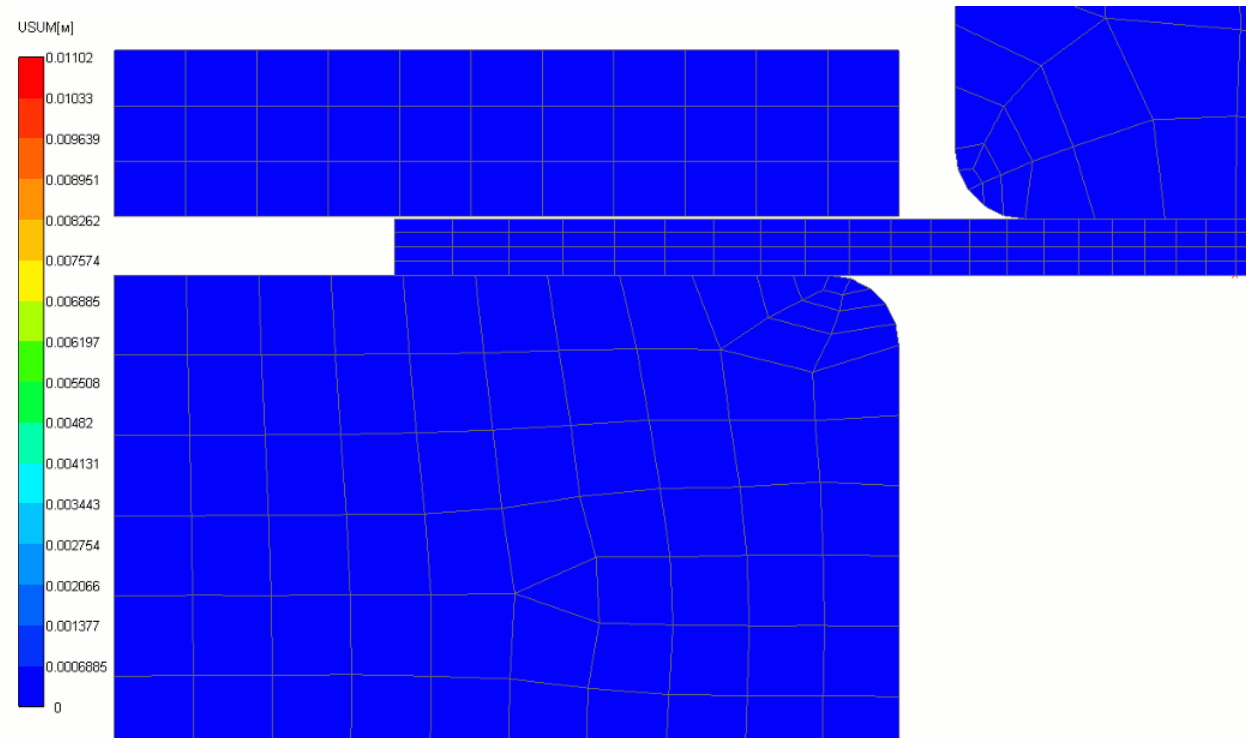
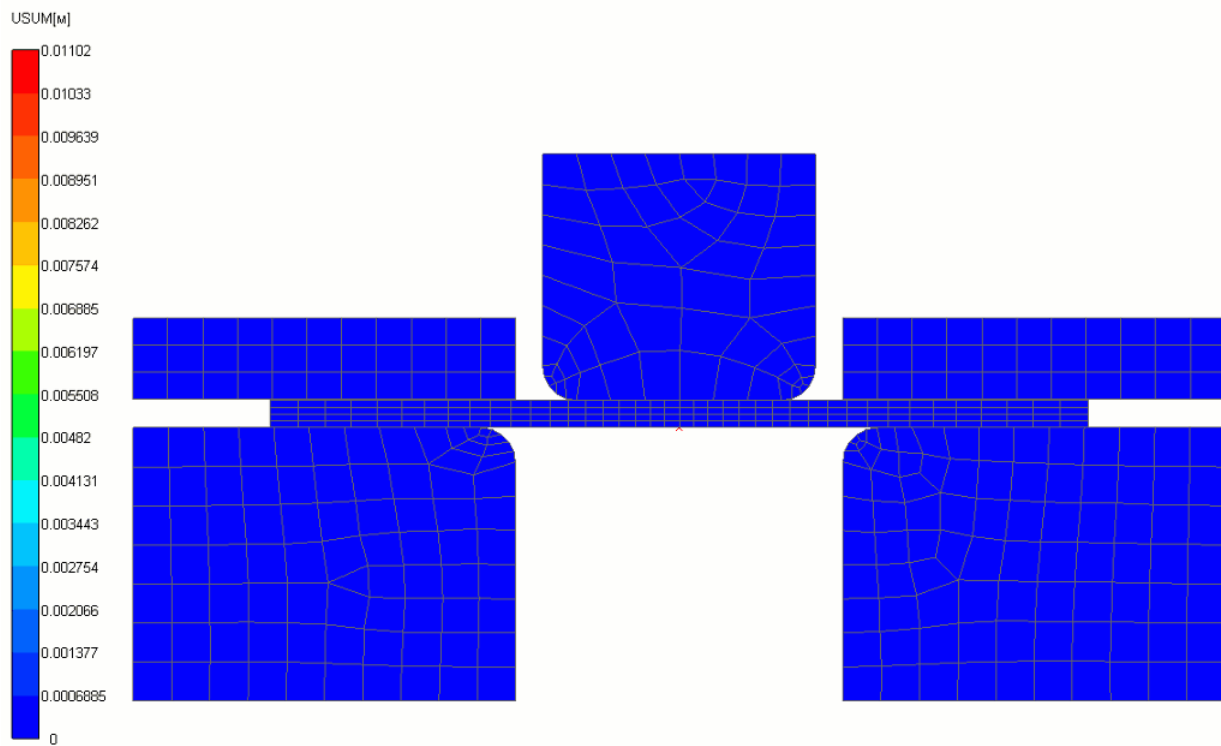
Примеры





Листовая штамповка

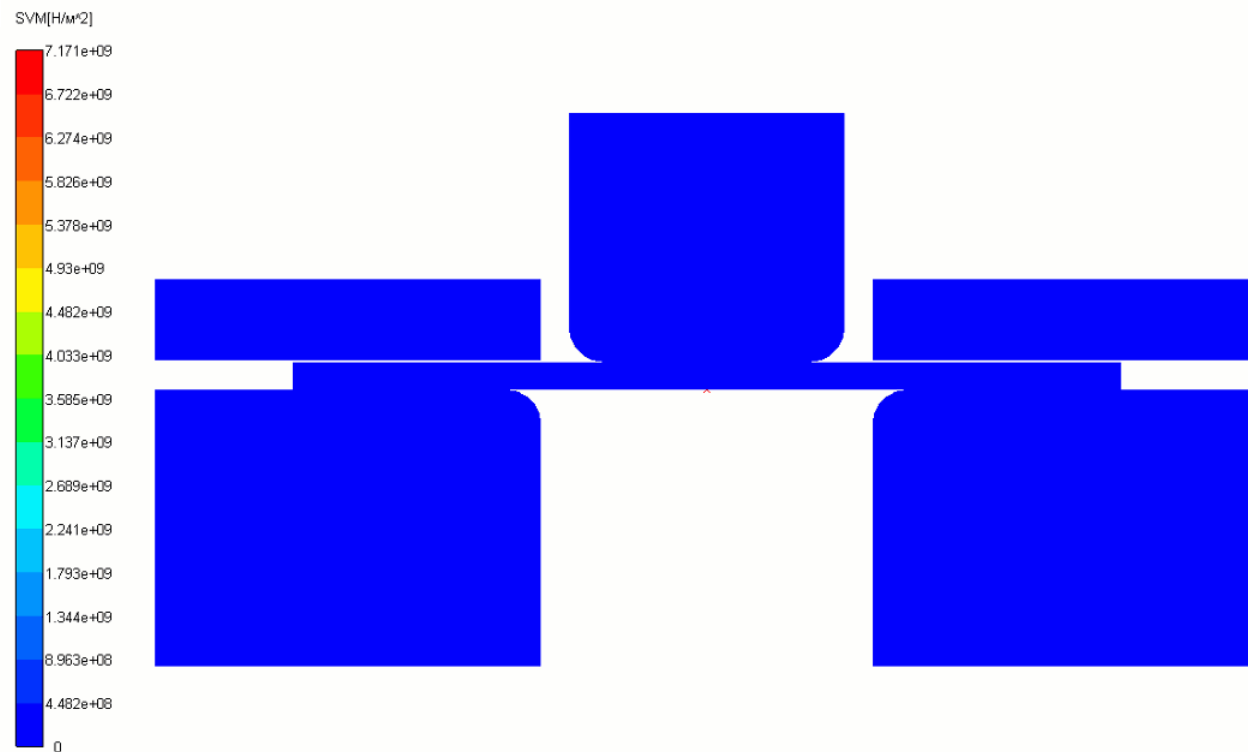
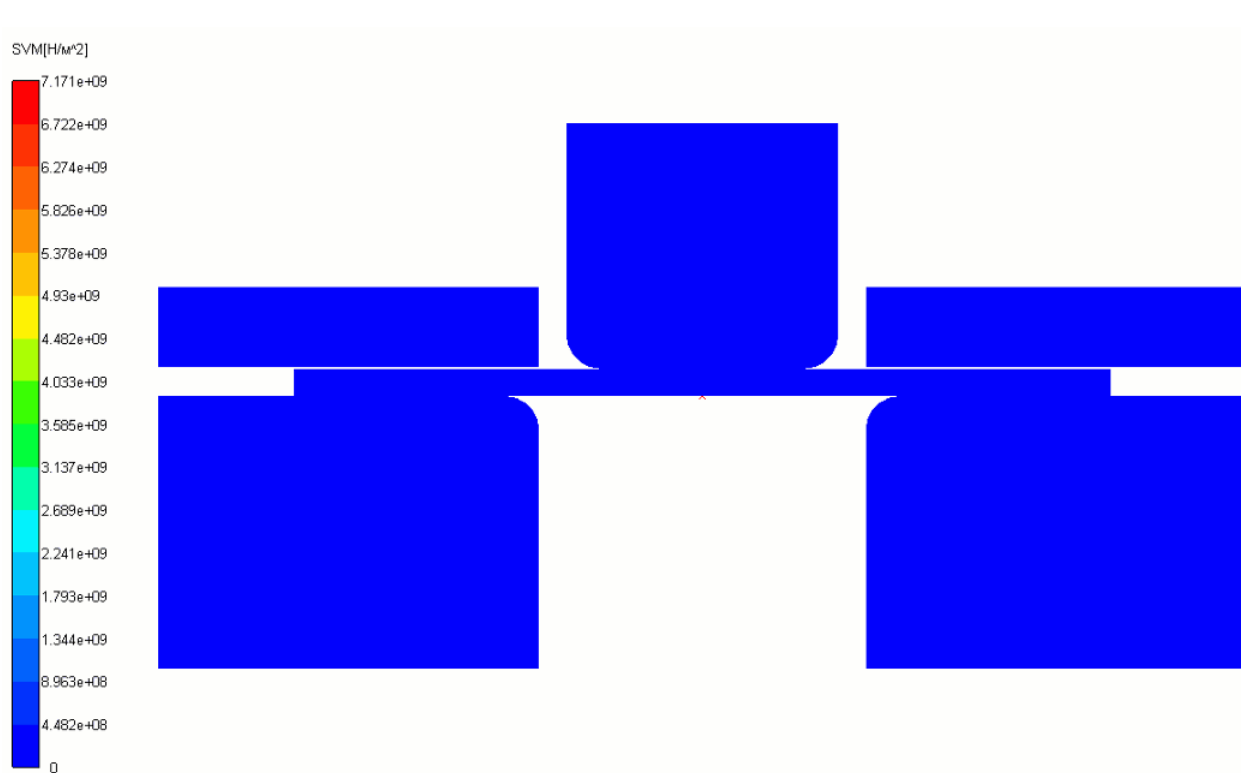
Примеры





Листовая штамповка

Примеры





Спасибо за внимание!

**Компания НТЦ «АПМ»
(научно-технический центр)
Московская область, г. Королев
Октябрьский бульвар, д. 14, офис 6
Тел.: (495) 120-58-10
Internet: [www. apm.ru](http://www.apm.ru)
E-mail: com@apm.ru**