



**ФГБНУ «Научно-исследовательский институт  
перспективных материалов и технологий», г. Москва**

**«ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ  
ДЛЯ ИНЖЕНЕРНОГО АНАЛИЗА КОНСТРУКЦИЙ»  
Ежегодный форум Пользователей 2018**

# **РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАННЫХ ПЬЕЗОПРИВОДОВ**

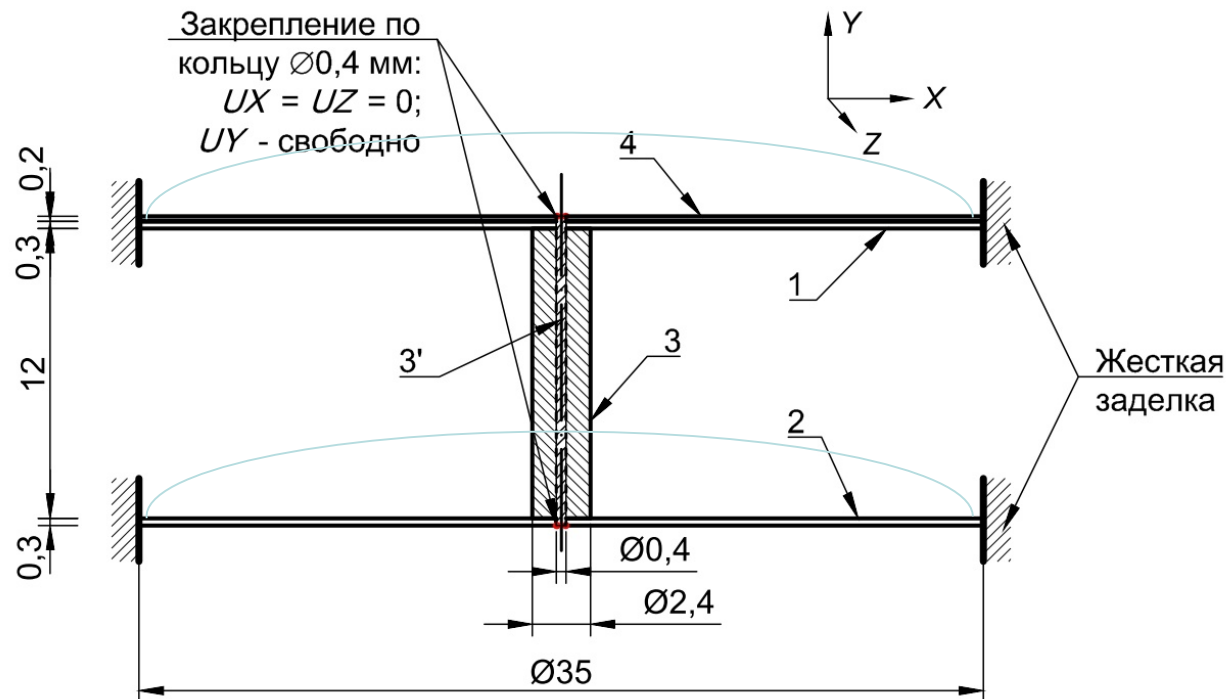
**Матвеев Егор Владимирович, н.с., к.т.н.  
Виноградов Александр Николаевич, в.н.с., к.т.н.**

**Москва, 2018**

# Схема двойной мембраны с промежуточным стержнем

## Цель исследований

- 1) Верификация аналитической методики.
- 2) Сравнение различных методов.



№ эл	Наименование	Материал	Диаметр (мм)	Толщина, высота (мм)	Плотность (г/см <sup>3</sup> )	Модуль Юнга (ГПа)	Коэфф. Пуассона
1	Подложка	Латунь Л63	35,0	0,30	8,44	114,0	0,33
2	Мембрана	Латунь Л63	35,0	0,30	8,44	114,0	0,33
3	Стержень	Латунь Л63	2,40	12,0	8,44	114,0	0,33
3'	Стержень (центральная часть)	Латунь Л63	0,40	12,8	8,44	114,0	0,33
4	Пьезодиск	Керамика PZT-5H	35,0	0,20	7,50	60,6	0,34

# Экспериментальные исследования

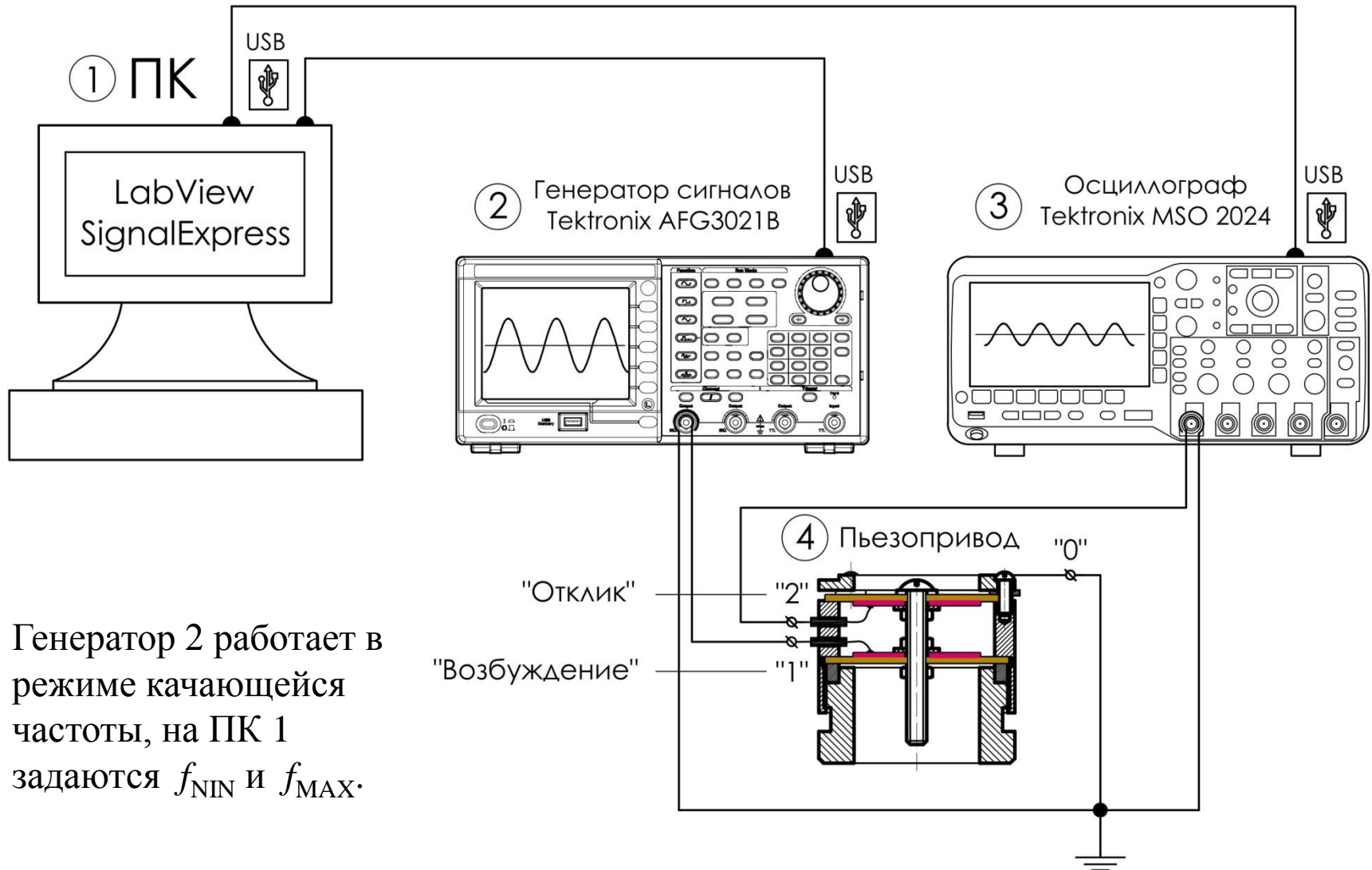
Двухмембранный  
пьезопривод



Фото экспериментальной установки

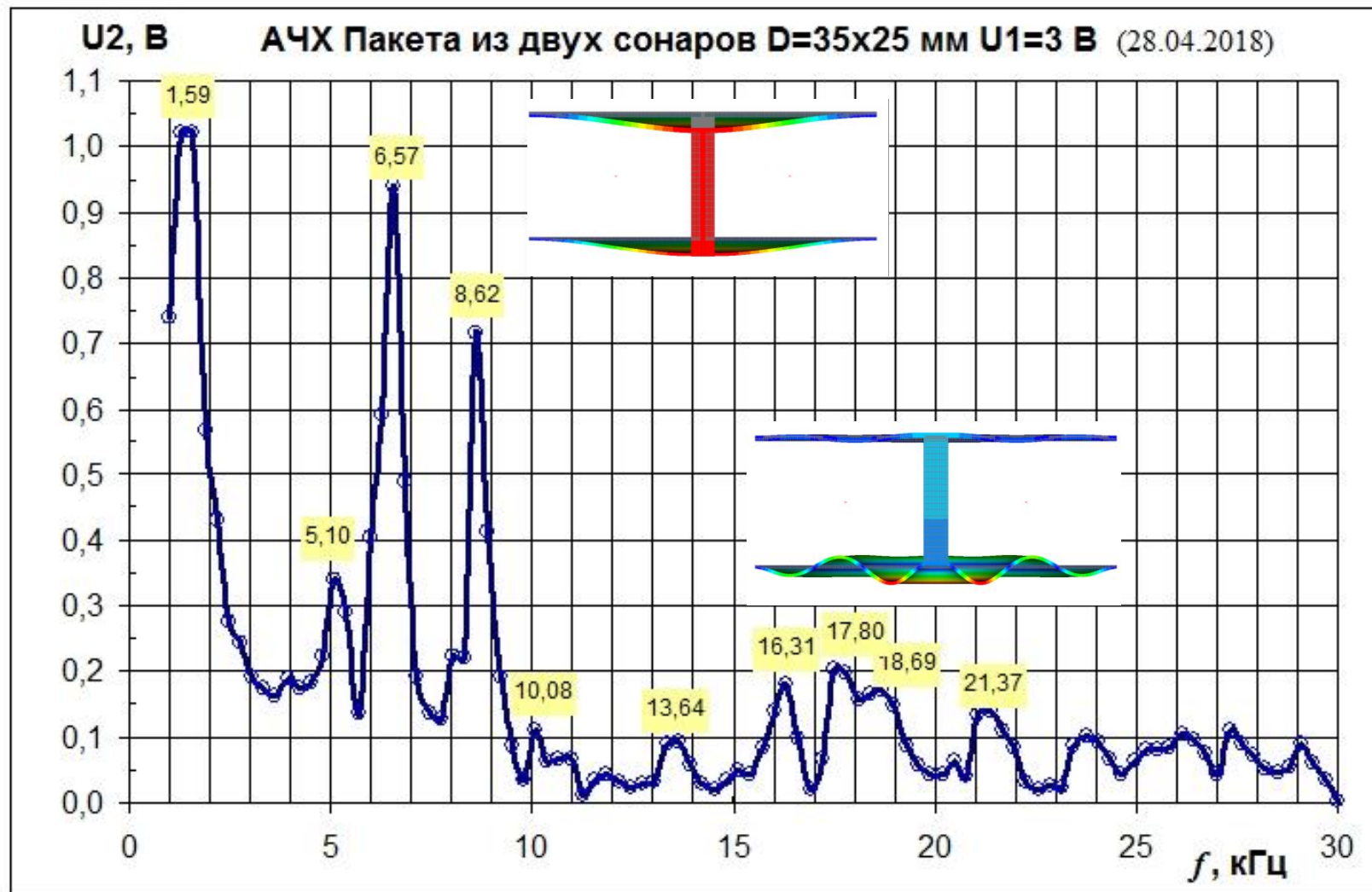


# Схема программно-аппаратного стенда измерения АЧХ



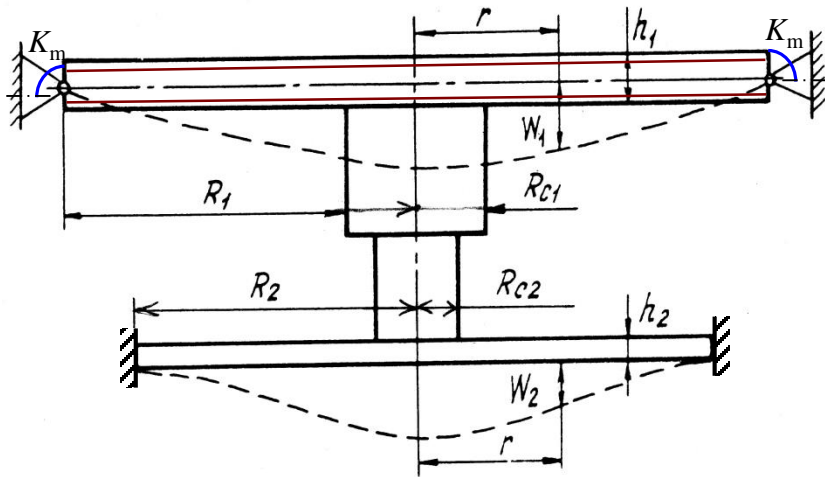
Генератор 2 работает в режиме качающейся частоты, на ПК 1 задаются  $f_{\text{MIN}}$  и  $f_{\text{MAX}}$ .

# Экспериментальная амплитудно-частотная характеристика



# Аналитическая модель

Расчётная схема



$K_m = M_r / \varphi$  – жёсткость контурной связи.

Форма решения (прогиба):  $w(r, t) = W(r) \sin \omega t$ .

В безразмерных координатах  $\alpha_i = r(m_i \omega^2 / D_i)^{1/4}$ :

$$\left( \frac{d^2}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\alpha} \right)^2 W_i - W_i = 0; \quad \begin{array}{l} \text{Для } \alpha_1: R_{c1} < r < R_1; \\ \text{для } \alpha_2: R_{c2} < r < R_2. \end{array}$$

Решение в цилиндрических функциях Бесселя, прогибы:

$$W_1[\alpha_1(r, \omega)] = C_1 J_0(\alpha_1) + C_2 Y_0(\alpha_1) + C_3 I_0(\alpha_1) + C_4 K_0(\alpha_1);$$

$$W_2[\alpha_2(r, \omega)] = C_5 J_0(\alpha_2) + C_6 Y_0(\alpha_2) + C_7 I_0(\alpha_2) + C_8 K_0(\alpha_2).$$

Углы поворота нормали  $\varphi$ :

$$\varphi_1 = dW_1 / d\alpha_1 = -C_1 J_1(\alpha_1) - C_2 Y_1(\alpha_1) + C_3 I_1(\alpha_1) - C_4 K_1(\alpha_1);$$

$$\varphi_2 = dW_2 / d\alpha_2 = -C_5 J_1(\alpha_2) - C_6 Y_1(\alpha_2) + C_7 I_1(\alpha_2) - C_8 K_1(\alpha_2);$$

Уравнение Софи Жермен – Лагранжа с нагрузкой  $q = -m\ddot{w}$  (принцип Д'Аламбера):

$$D_i \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 w_i + m_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0, \quad (i = 1, 2)$$

$w_i(r, t)$  – искомая функции прогиба;  $t$  – время;

$i = 1$  – привод,  $i = 2$  – мембрана;

$m_i = \rho_i h_i$  – интенсивность массы;  $\rho_i$  – плотность;

$D_i$  – приведённая цилиндрическая жёсткость  $D_{\Pi}$ ,

для  $n$ -слойной пластины:

$$D_{\Pi} = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{E_k h_k^3}{12(1 - \nu_k^2)} + \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} (\delta_k - \delta)^2 \right]$$

$E_k, \nu_k$  – модуль Юнга и коэфф. Пуассона

$\delta_k, \delta$  – ординаты середины  $k$ -го слоя и нейтрального слоя системы.

Граничные условия для определения  $C_i$

$$1) W_1(R_1) = 0; \quad 2) M_{r1}(R_1) + K_m \varphi_1(R_1) = 0;$$

$$3) W_2(R_2) = 0; \quad 4) W_1(R_{c1}) - W_2(R_{c2}) = 0;$$

$$5) \varphi_1(R_{c1}) = 0; \quad 6) \varphi_2(R_2) = 0; \quad 7) \varphi_2(R_{c2}) = 0;$$

$$8) 2\pi(R_{c1} Q_1 + R_{c2} Q_2) - M_c \omega^2 W_1(R_{c1}) = 0.$$

## Аналитическая модель. Продолжение

Радиальные  $M_r$  и окружные  $M_\theta$  изгибающие моменты:

$$M_{ri} = -D_i \left( \frac{d^2 W_i}{dr^2} + \frac{\nu_i}{r} \frac{dW_i}{dr} \right), \quad M_{\theta i} = -D_i \left( \frac{1}{r} \frac{dW_i}{dr} + \nu_i \frac{d^2 W_i}{dr^2} \right)$$

Поперечные силы  $Q(r, t)$ :

В безразмерных координатах  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :

$$Q_i = -D_i \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) W_i(r, t). \quad Q_i = -D_i^{0,25} m_i^{0,75} \omega^{1,5} d [L_i W_i(\alpha_i, t)] / d\alpha_i,$$

Здесь  $L$  – оператор Лапласа в полярных координатах:  $L_i = \frac{d^2}{d\alpha_i^2} + \frac{1}{\alpha_i} \frac{d}{d\alpha_i}$ .

Все 8 уравнений из граничных условий – однородные. Однородная система:

$$[A_{ki}] \cdot \{C_i\} = \{B_k\}, \quad B_k = 0, \quad (k, i = 1, 2, \dots, 8).$$

Определитель  $\det [A_{ki}] = 0$ , корни – собственные частоты.

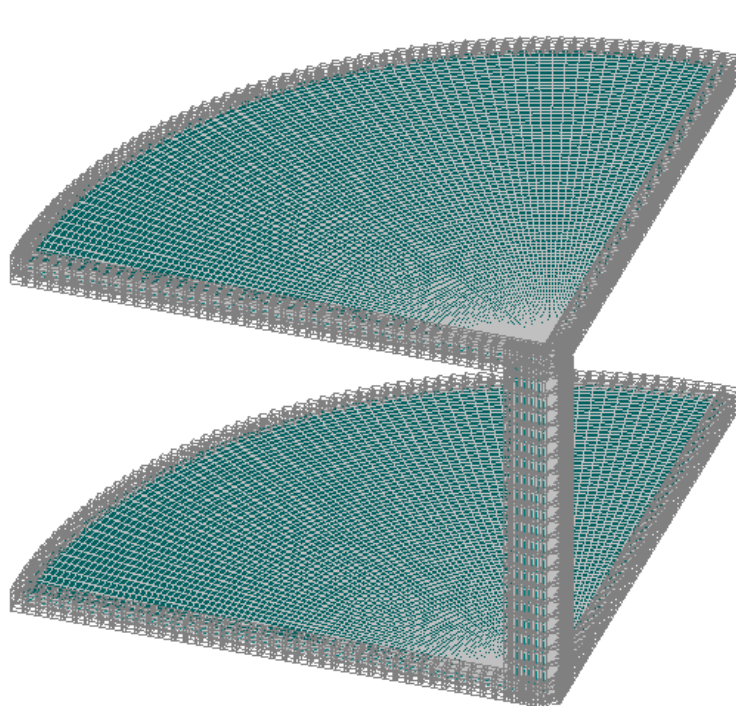
Приняв  $C_1 = 1$ , из решения неоднородной системы первых 7 уравнений

$$[A_{ki}] \cdot \{C_i\} = \{B_k\}, \quad (k, i = 1, 2, \dots, 7)$$

определяются **собственные формы колебаний** с относительными амплитудами.



# Расчетная модель двойной мембраны в APM Structure 3D



## Сетка в APM

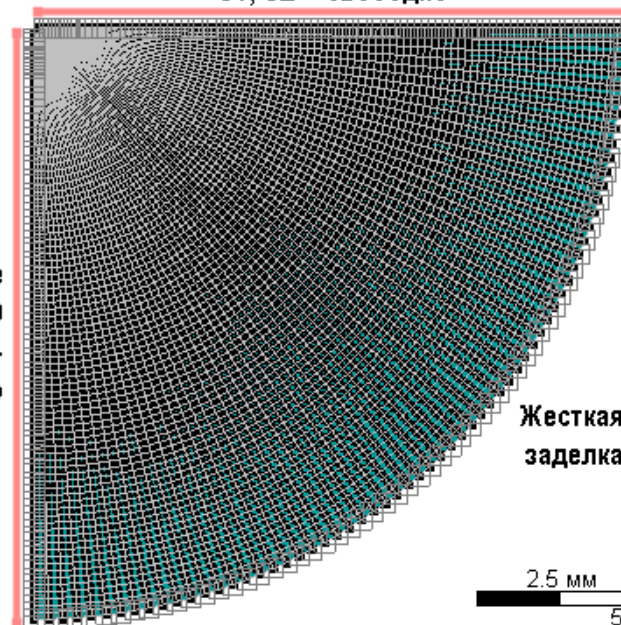
- Четверть модели с характерными закреплениями
- 8-узловые гексаэдры

## Схема закрепления расчетной модели двойной мембраны в APM Structure 3D

Закрепление  
 $U_Y = 0$   
 $U_X, U_Z$  - свободно



Закрепление  $U_X = 0$   
 $U_Y, U_Z$  - свободно



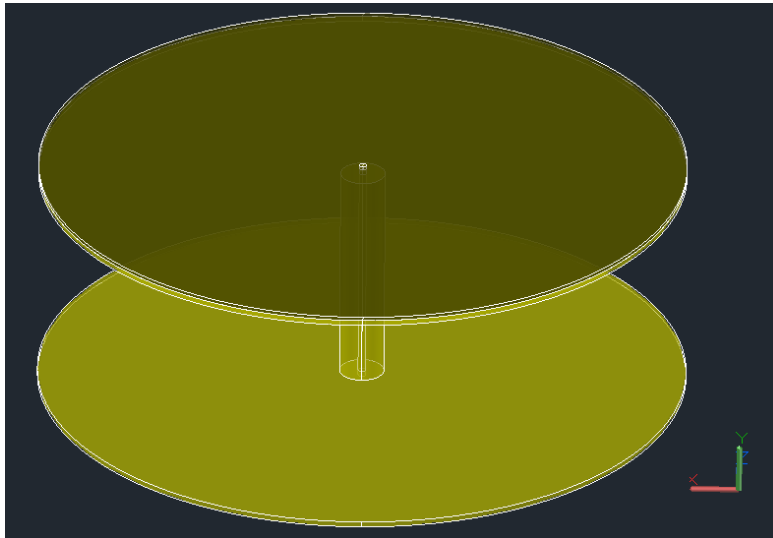
Жесткая  
заделка





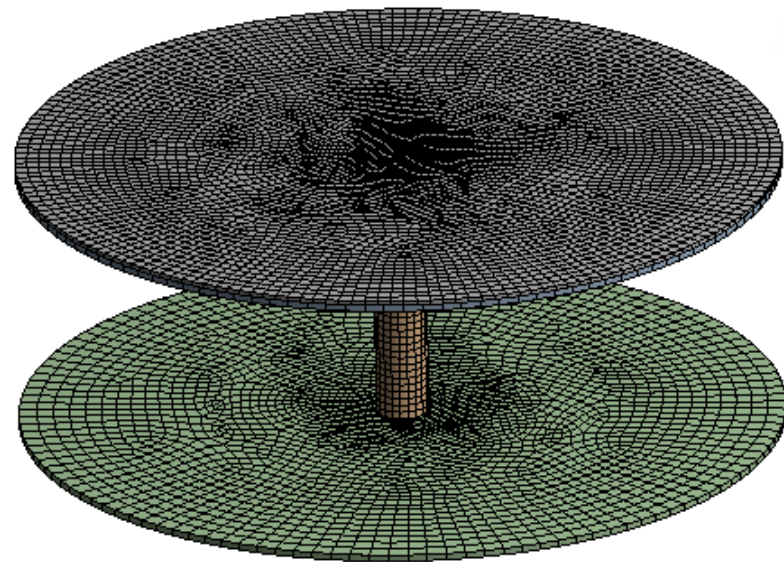
# *Расчетная модель двойной мембраны в ANSYS*

## *Модель в AUTOCAD*



## *Сетка в ANSYS*

- *Полная модель*
- *20-узловые гексаэдры*
- *10-узловые тетраэдры*
- *Закрепление по боковой поверхности обоих дисков*



0,000 10,000 (mm)  
5,000

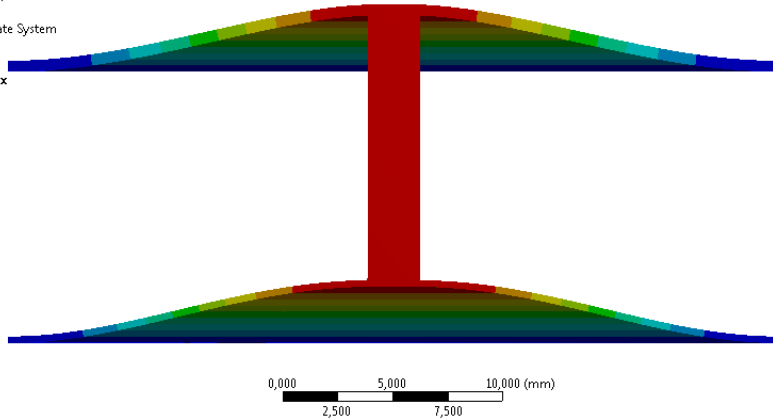


# 1 форма изгибных колебаний

A: Modal  
Directional Deformation  
Type: Directional Deformation(Y Axis)  
Frequency: 1970,9 Hz  
Unit: mm  
Global Coordinate System  
02.05.2018 15:17

788,11 Max  
700,54  
612,97  
525,4  
437,84  
350,27  
262,7  
175,13  
87,567  
-0 Min

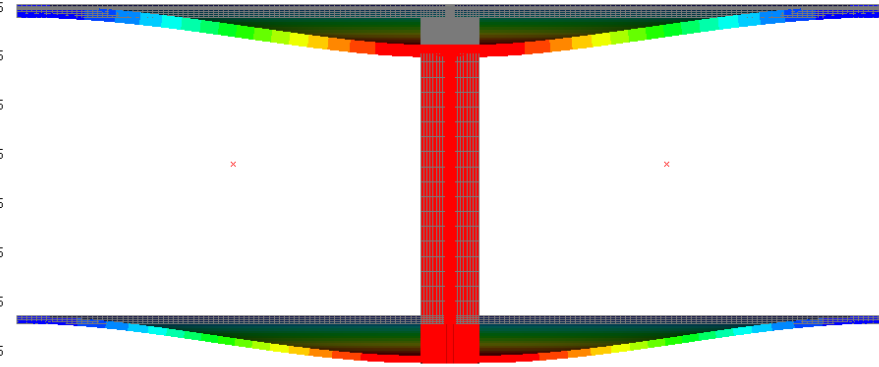
ANSYS



$$f_{1\_ANS} = 1,971 \text{ кГц}$$

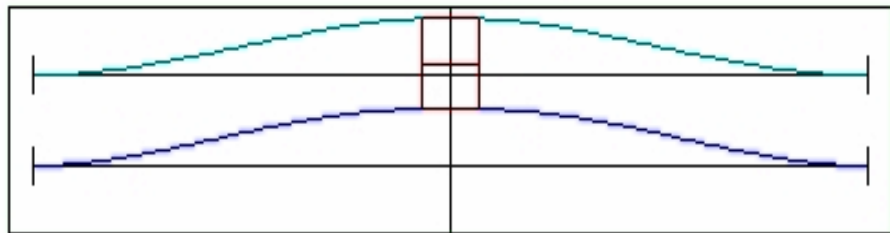
APM Structure3D

USUM[-]  
1  
0.9375  
0.875  
0.8125  
0.75  
0.6875  
0.625  
0.5625  
0.5  
0.4375  
0.375  
0.3125  
0.25  
0.1875  
0.125  
0.0625  
0  
z  
x



$$f_{1\_APM} = 2,073 \text{ кГц}$$

## Аналитический метод



F0= 1.00 F1= 1.991(kHz) FM= 31.00  
Масштаб k= .5 Форма колебаний No 1

$$f_{1\_ан} = 1,991 \text{ кГц}$$

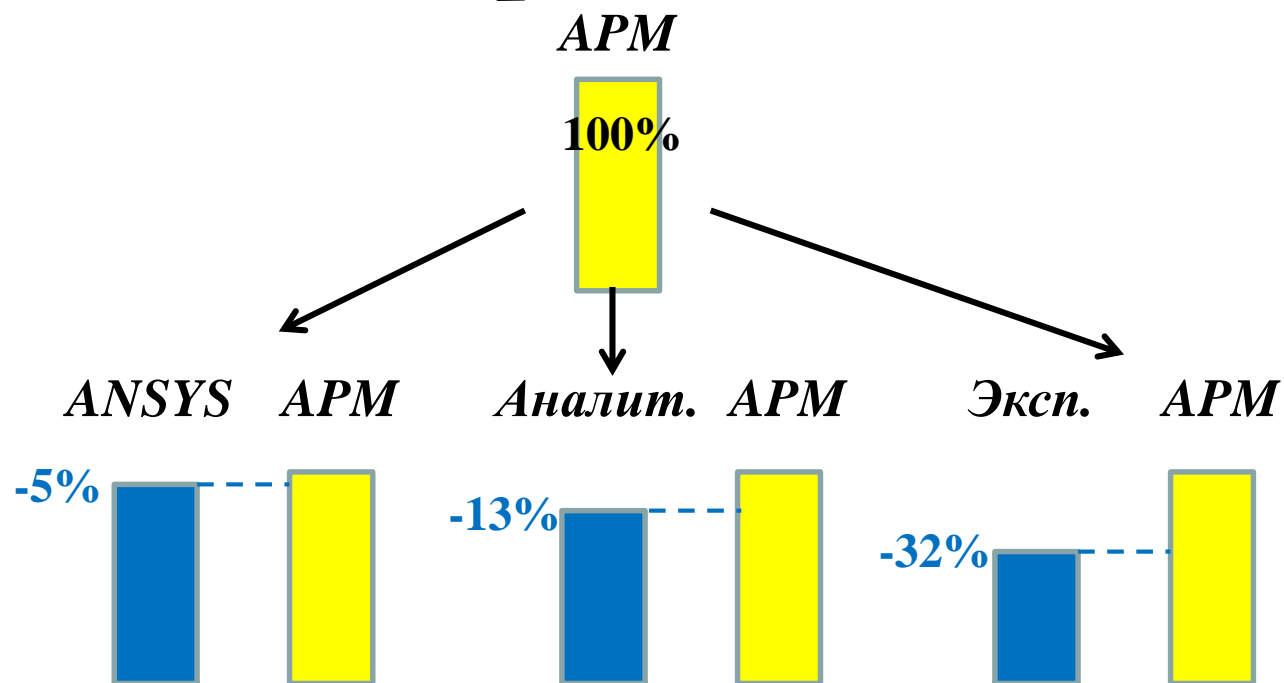
## Сравнение результатов

$$\delta = [(f_1 - f_1') / f_1] \cdot 100\%$$

	$f_{1\_APM}$	$f_{1\_ANS}$	$f_{1\_ан}$	$f_{1\_эксп}$
$f_{1\_APM}$		-5	-13	-23
$f_{1\_ANS}$	+5		-8	-19
$f_{1\_ан}$	+15	+9		-12
$f_{1\_эксп}$	+30	+24	+14	

# Как понимать сравнение результатов?

$\delta$	$f_{1\_APM}$	$f_{1\_ANS}$	$f_{1\_ан}$	$f_{1\_эксн}$
$f_{1\_APM}$		-5	-13	-32
$f_{1\_ANS}$	+5		-8	-29
$f_{1\_ан}$	+15	+9		-22
$f_{1\_эксн}$	+47	+40	+28	

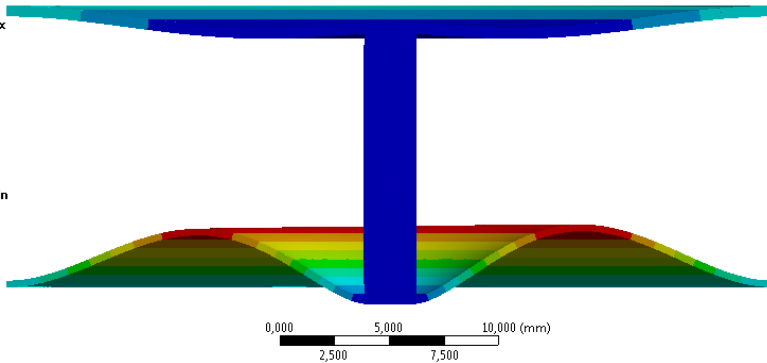


# II форма изгибных колебаний

**ANSYS**

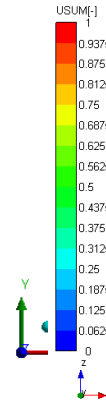
A: Modal  
Directional Deformation 2  
Type: Directional Deformation(Y Axis)  
Frequency: 4723, Hz  
Unit: mm  
Global Coordinate System  
02.05.2018 15:17

961,51 Max  
812,59  
663,67  
514,75  
365,83  
216,91  
67,992  
-80,928  
-229,85  
-378,77 Min



$$f_{2\_ANS} = 4,723 \text{ кГц}$$

**APM Structure3D**



$$f_{2\_APM} = 5,008 \text{ кГц}$$

**Аналитический метод**



$$f_{2\_ан} = 4,872 \text{ кГц}$$

**Сравнение результатов**

$$\delta = [(f_2 - f_2')/f_2] \cdot 100\%$$

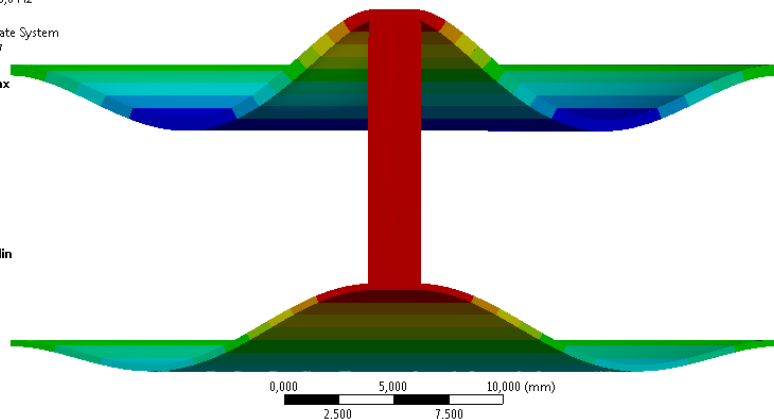
	$f_{2\_APM}$	$f_{2\_ANS}$	$f_{2\_ан}$	$f_{2\_эксп}$
$f_{2\_APM}$		-6	-4	+2
$f_{2\_ANS}$	+6		+2	+8
$f_{2\_ан}$	+4	-2		+6
$f_{2\_эксп}$	-2	-7	-6	

# III форма изгибных колебаний

A: Modal  
Directional Deformation 3  
Type: Directional Deformation(Y Axis)  
Frequency: 7763,6 Hz  
Unit: mm  
Global Coordinate System  
02.05.2018 15:17

**ANSYS**

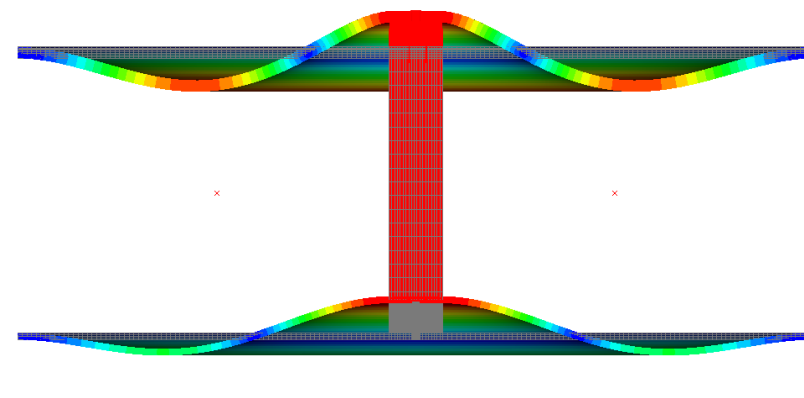
673.73 Max  
524,5  
375,26  
226,02  
76,789  
-72,448  
-221,68  
-370,92  
-520,16  
-669,39 Min



$$f_{3\_ANS} = 7,764 \text{ кГц}$$

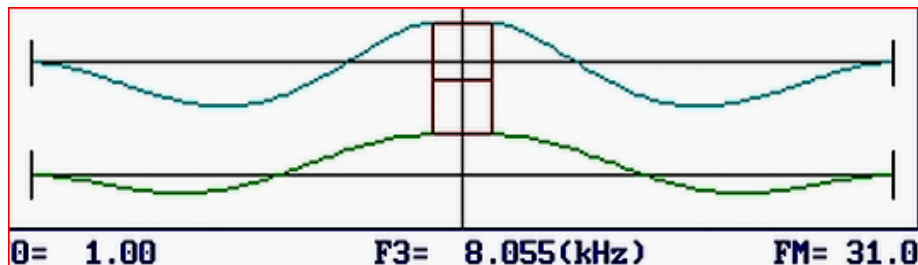
**APM Structure3D**

USUM[-]  
1  
0.9375  
0.875  
0.8125  
0.75  
0.6875  
0.625  
0.5625  
0.5  
0.4375  
0.375  
0.3125  
0.25  
0.1875  
0.125  
0.0625  
0  
z  
x



$$f_{3\_APM} = 8,039 \text{ кГц}$$

**Аналитический метод**



$$f_{3\_ан} = 8,055 \text{ кГц}$$

**Сравнение результатов**

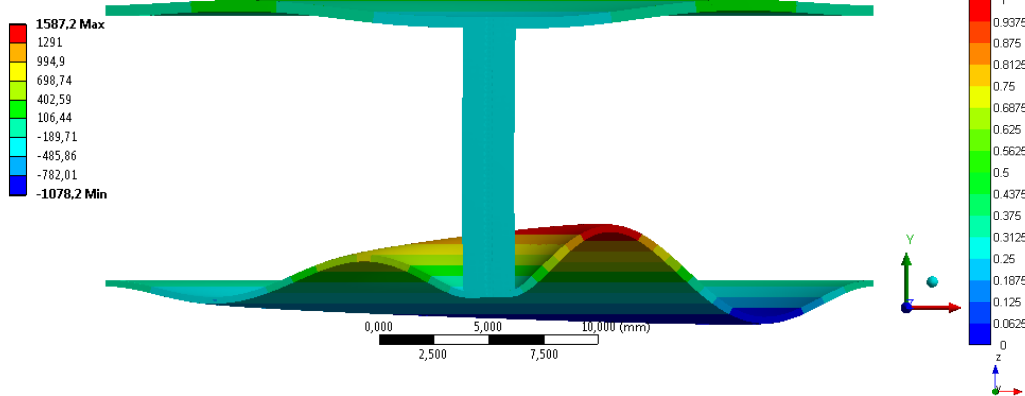
$$\delta = [(f_3 - f_3')/f_3] \cdot 100\%$$

	$f_{3\_APM}$	$f_{3\_ANS}$	$f_{3\_ан}$	$f_{3\_эксн}$
$f_{3\_APM}$		-3	-4	+7
$f_{3\_ANS}$	+4		-1	+11
$f_{3\_ан}$	+5	+1		+12
$f_{3\_эксн}$	-7	-10	-11	

# IV форма изгибных колебаний

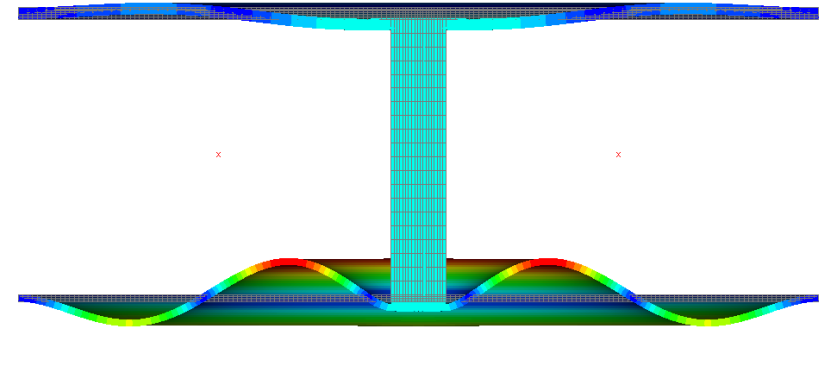
**ANSYS**

A: Modal  
Directional Deformation 4  
Type: Directional Deformation(Y Axis)  
Frequency: 12533 Hz  
Unit: mm  
Global Coordinate System  
02.05.2018 15:17



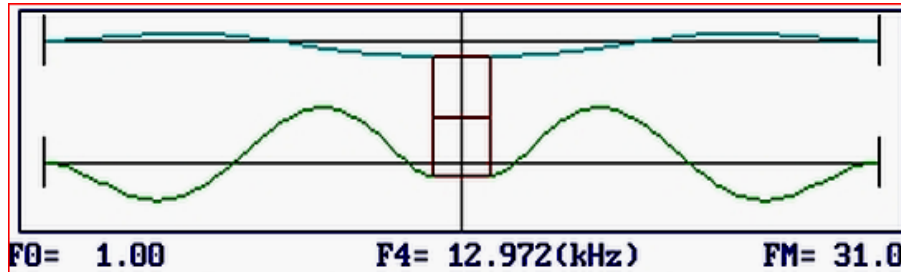
$$f_{4\_ANS} = 12,533 \text{ кГц}$$

**APM Structure3D**



$$f_{4\_APM} = 13,474 \text{ кГц}$$

**Аналитический метод**



$$f_{4\_ан} = 12,972 \text{ кГц}$$

**Сравнение результатов**

$$\delta = [(f_4 - f_4')/f_4] \cdot 100\%$$

	$f_{4\_APM}$	$f_{4\_ANS}$	$f_{4\_ан}$	$f_{4\_эксп}$
$f_{4\_APM}$		-7	-5	+1
$f_{4\_ANS}$	+8		+2	+9
$f_{4\_ан}$	+5	-2		+6
$f_{4\_эксп}$	-1	-8	-6	

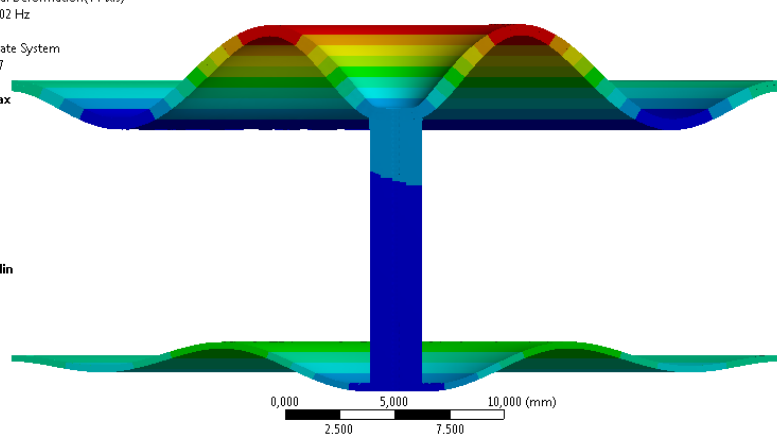


# V форма изгибных колебаний

**ANSYS**

A: Modal  
Directional Deformation 5  
Type: Directional Deformation(Y Axis)  
Frequency: 18302 Hz  
Unit: mm  
Global Coordinate System  
02.05.2018 15:17

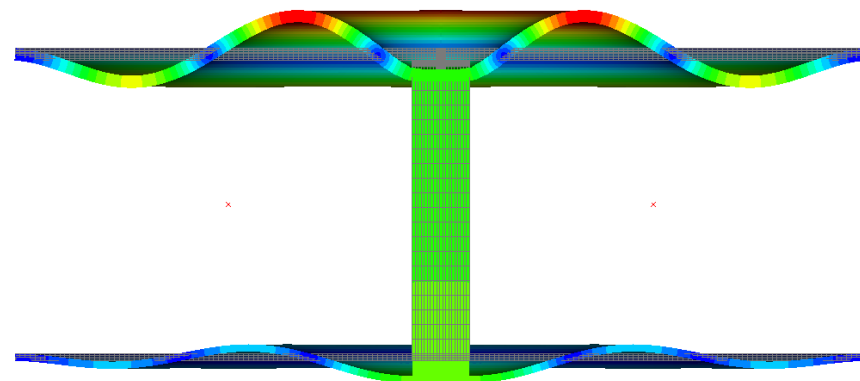
897.77 Max  
720.57  
559.37  
390.17  
220.97  
51.766  
-117.43  
-286.63  
-455.83  
-625.03 Min



$$f_{5\_ANS} = 18,302 \text{ кГц}$$

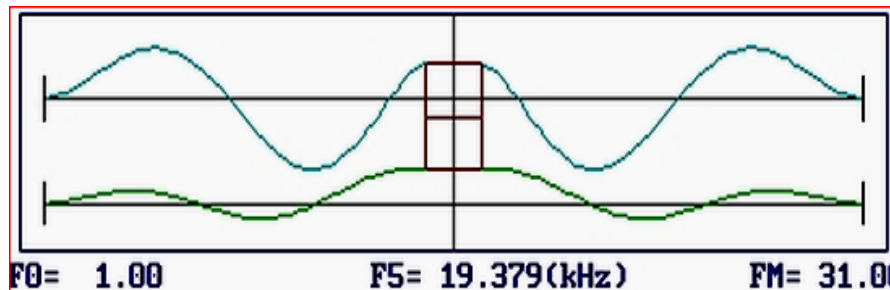
**APM Structure3D**

USUM[-]  
1  
0.9375  
0.875  
0.8125  
0.75  
0.6875  
0.625  
0.5625  
0.5  
0.4375  
0.375  
0.3125  
0.25  
0.1875  
0.125  
0.0625  
0  
z  
x



$$f_{5\_APM} = 18,984 \text{ кГц}$$

**Аналитический метод**



$$f_{5\_ан} = 19,379 \text{ кГц}$$

**Сравнение результатов**

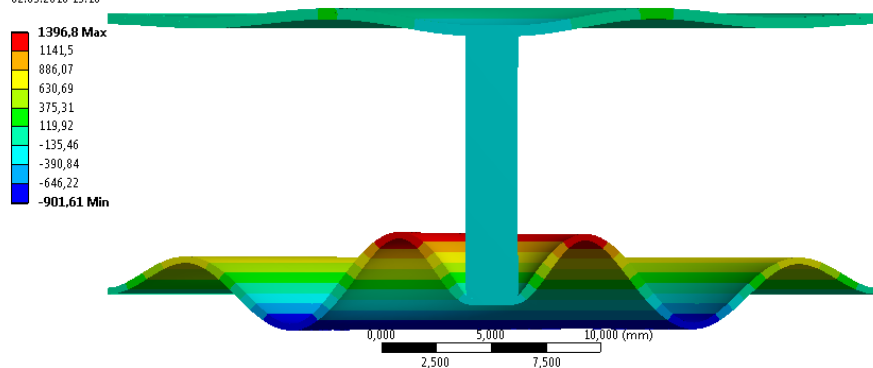
$$\delta = [(f_5 - f_5')/f_5] \cdot 100\%$$

	$f_{5\_APM}$	$f_{5\_ANS}$	$f_{5\_ан}$	$f_{5\_эксн}$
$f_{5\_APM}$		-4	+1	-2
$f_{5\_ANS}$	+4		+4	+2
$f_{5\_ан}$	-1	-4		-2
$f_{5\_эксн}$	+2	-2	+2	

# VI форма изгибных колебаний

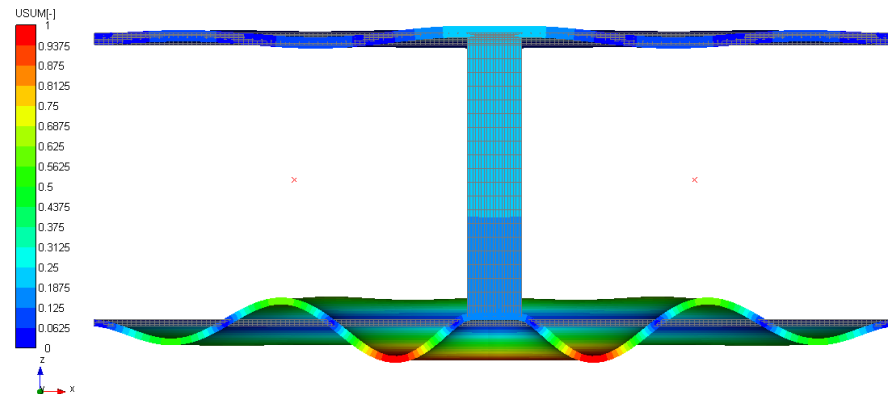
**ANSYS**

A: Modal  
Directional Deformation 6  
Type: Directional Deformation(Y Axis)  
Frequency: 24061 Hz  
Unit: mm  
Global Coordinate System  
02.05.2018 15:18



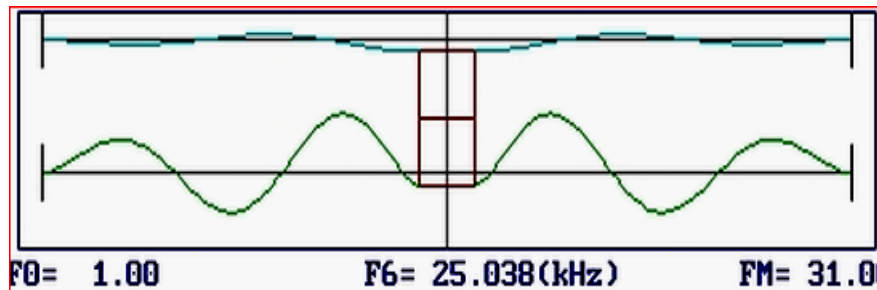
$$f_{6\_ANS} = 24,061 \text{ кГц}$$

**APM Structure3D**



$$f_{6\_APM} = 26,019 \text{ кГц}$$

**Аналитический метод**



$$f_{6\_ан} = 25,038 \text{ кГц}$$

**Сравнение результатов**

$$\delta = [(f_6 - f_6')/f_6] \cdot 100\%$$

	$f_{6\_APM}$	$f_{6\_ANS}$	$f_{6\_ан}$	$f_{6\_эксп}$
$f_{6\_APM}$		-8	-5	-8
$f_{6\_ANS}$	+8		+3	-0
$f_{6\_ан}$	+5	-3		-3
$f_{6\_эксп}$	+8	+0	+4	

# Сравнение результатов

Отклонения  $\delta$  (%) результатов, полученных численными и экспериментальным методами относительно аналитического

Значения собственных частот  $f$  (кГц) и погрешности

№	Аналитический метод	ANSYS	$\delta$ (%)	АПМ	$\delta$ (%)	Эксперимент	$\delta$ (%)
1	1,991	1,971	<b>-1,00</b>	2,073	<b>4,12</b>	1,59	<b>-20,14</b>
2	4,872	4,723	<b>-3,06</b>	5,008	<b>2,79</b>	5,10	<b>4,68</b>
3	8,055	7,764	<b>-3,61</b>	8,039	<b>-0,20</b>	6,57	<b>-18,44</b>
	8,055					8,62	<b>7,01</b>
4	12,972	12,533	<b>-3,38</b>	13,474	<b>3,87</b>	10,08	<b>-22,29</b>
	12,972					13,64	<b>5,15</b>
5	19,379	18,302	<b>-5,56</b>	18,984	<b>-2,04</b>	16,31	<b>-15,84</b>
	19,379					17,80	<b>-8,15</b>
6	25,038	26,061	<b>4,09</b>	26,019	<b>3,92</b>	21,30	<b>-14,93</b>

Min:	<b>-5,6</b>	<b>-2,0</b>	<b>-22,3</b>
Max:	<b>4,1</b>	<b>4,1</b>	<b>7,0</b>

## ***Выводы***

- 1. Исследования первых 6 собственных форм и частот колебаний модели двухмембранного пьезопривода показало полную состоятельность аналитической методики.
- 2. Сравнение результатов численных методов относительно аналитического дало максимальную погрешность 4,1 % как в ANSYS, так и в APM Structure 3D.
- 3. Существенные отклонения экспериментального метода объясняются не полной адекватностью расчётной модели. Практически все измеренные частоты оказались ниже расчетных из-за неучтённых масс (гаек, шайб, длины стержня).

# *APM Structure 3D в расчете микро (пьезо) устройств*

## *Достоинства*

1. Высокая доступность.
2. Отличное соотношение цены и возможностей.
3. Корректность расчета при правильной постановке задачи.
4. Широкие возможности редактирования модели на любом этапе моделирования.
5. Различные сочетания нагрузок.
6. Многообразие свойств (например, учет анизотропии модуля упругости).
7. Простая работа в ручном режиме с разными видами элементов

## *Недостатки*

1. Необходимость контроля за качеством автоматически генерируемой сетки и контактов (это влияет на точность расчета).
2. «Осторожная» работа со сложными объемными экспортированными моделями.
3. Небольшой круг воздействий (нет пьезоэлектричества и т.п. )
4. Мало (по сравнению с другими КЭ пакетами) видов элементов

***Спасибо за внимание!***